АЛГЕБРА

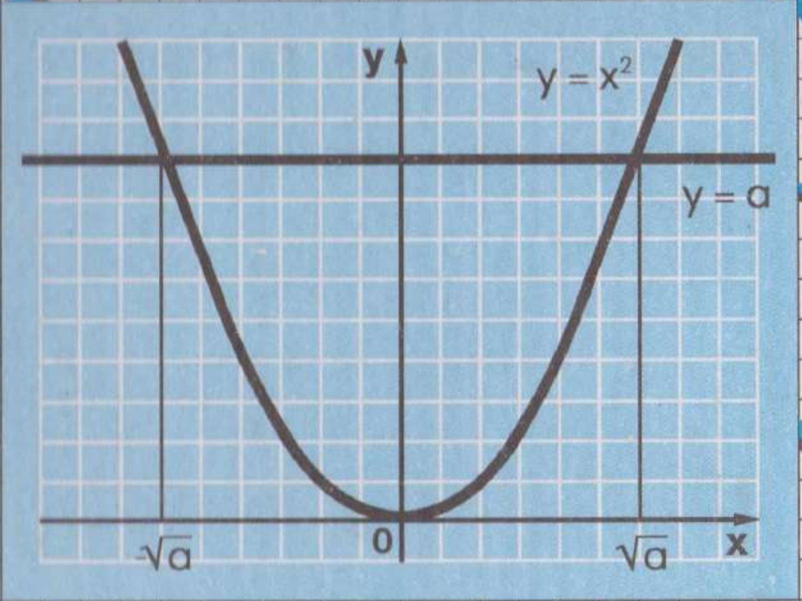
сыйныф

8

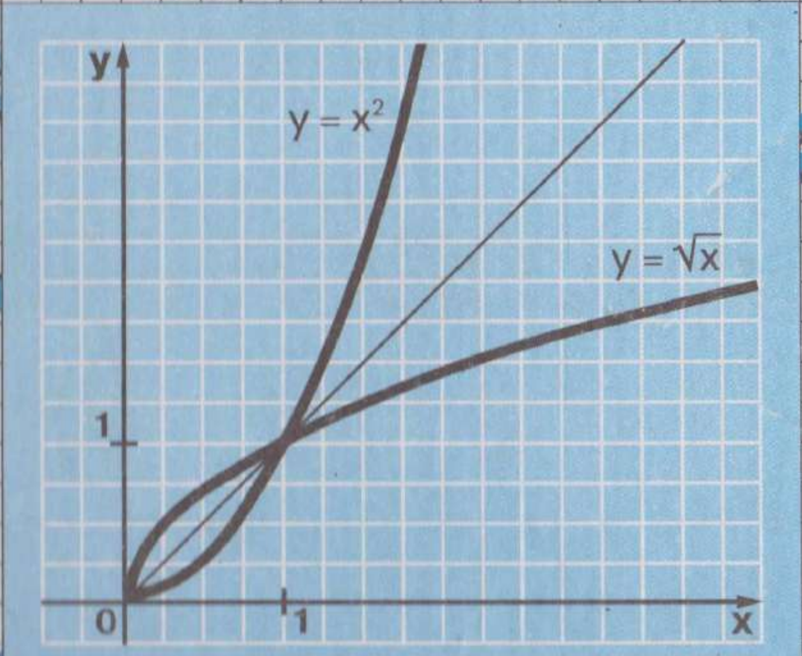
АЛГЕБРА

8

$x^2 = a$ ТИГЕЗЛӘМӘСЕНЕҢ ЧИШЕЛЕШЕ



$y = x^2 (x \geq 0)$ һәм $y = \sqrt{x}$ ФУНКЦИЯЛӘРЕНЕҢ ГРАФИКЛАРЫ



БӨТЕН КҮРСӘТКЕЧЛЕ ДӘРӘҖӘНЕҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad (ab)^n = a^n \cdot b^n$

$a^m : a^n = a^{m-n}$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

(m һәм n – бөтен саннар, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

АРИФМЕТИК КВАДРАТ ТАМЫРНЫҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ

$\sqrt{a^2} = |a|$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, биредә $a \geq 0, b \geq 0$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, биредә $a \geq 0, b > 0$

КВАДРАТ ТИГЕЗЛӘМӘ ТАМЫРЛАРЫНЫҢ ФОРМУЛАСЫ

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

$D = b^2 - 4ac$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ булганда, $D \geq 0$

АЛГЕБРА

ТАТАР УРТА ГОМУМИ БЕЛЕМ БИРҮ МӘКТӘБЕНЕҢ 8 НЧЕ СЫЙНЫФЫ ӨЧЕН ДӘРЕСЛЕК

С. А. ТЕЛЯКОВСКИЙ редакциясендә

Россия Федерациясе Мәгариф һәм фән министрлыгы тәкъдим иткән

I бүлек
РАЦИОНАЛЬ ВАКЛАНМАЛАР

II бүлек
КВАДРАТ ТАМЫРЛАР

III бүлек
КВАДРАТ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР

IV бүлек
ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР

V бүлек
БӨТЕН КҮРСӘТКЕЧЛЕ ДӘРӘҖӘ

Казан • «Мәгариф» нәшрияты
Москва • «Просвещение»
2005

УДК 373.167.1 : 512*08
ББК 22.14 я72
А47

Авторлары:
Ю. Н. МАКАРЫЧЕВ, Н. Г. МИНДЮК,
К. И. НЕШКОВ, С. Б. СУВОРОВА

Дәреслек 1988 елда гомуми урта белем бирү мәктәпләре өчен дәреслекләрнең Бөтенсоюз конкурсында беренче урын алган

Шартлы тамгалар

	хәтердә калдырырга тиешле текст
■	белергә тиешле материал
▶	мәсьәләне чишә башлау
◁	мәсьәлә чишүне тәмамлау
●	расламаны нигезләү яки формуланы чыгара башлау
○	нигезләүне яки формула чыгаруны тәмамлау
221	чишә белү мәҗбүри саналган дәрәҗәдәге бирем
341	өйдә эшләү өчен бирем
529	авыррак мәсьәлә

Алгебра: Учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений/ Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; Под ред. С. А. Теляковского.— 12-е изд.— М.: Просвещение, 2004.

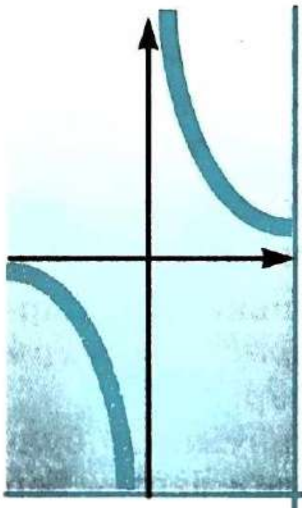
Охраняется Законом РФ «Об авторском праве и смежных правах». Воспроизведение всей книги или ее части на любых видах носителей запрещается без письменного разрешения издательства.

Переводное издание учебника выпущено в свет по Лицензионному договору 3/16 от 14.02.05. Экземпляры переводного издания подлежат распространению исключительно в Республике Татарстан, а также среди татарской диаспоры на территориях других субъектов Российской Федерации.

Алгебра: Татар урта гомуми белем бирү мәкт. 8 нче с-фы
А47 өчен д-лек / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; Русчадан Ф. М. Хафизова, Л. Ш. Галиева тәрҗ.— Казан: Мәгариф, 2005.— 238 б. : рәс. б-н.
ISBN 5-7761-1497-7

ISBN 5-7761-1497-7

© Издательство «Просвещение», 1989
© Художественное оформление. Издательство «Просвещение», 2000
Все права защищены
© Татарчага тәрҗемә, «Мәгариф» нәшрияты, 2005, үзгәрешләр белән



I бүлек

Рациональ вакланмалар

§ 1 Рациональ вакланмалар һәм аларның үзлекләре

1. Рациональ аңлатмалар

VII сыйныф курсында без бөтен аңлатмаларның, ягъни саннардан һәм үзгәрешлеләрдән кушу, алу һәм тапкырлау, шулай ук нульдән үзгә булган санга бүлү гамәлләре ярдәмендә төзелгән аңлатмаларның рәвешүзгәртүе белән шөгыльләндек. Мәсәлән,

$$7a^2b,\ m^3+n^3,\ (x-y)(x^2+y^2),$$
$$b^{10}-\frac{b(3b+c)}{7},\ \frac{a+5}{8},\ 2x:9$$

аңлатмалары бөтен аңлатмалар була.

Бөтен аңлатмалардан аермалы буларак

$$4a-\frac{b}{2a+1},\ \frac{x+y}{x^2-3xy+y^2},$$
$$\frac{n}{3}-\frac{5}{n^2+1},\ 2p:q$$

аңлатмалары кушу, алу һәм тапкырлау гамәлләреннән тыш үзгәрешлеле аңлатмага бүлү гамәлен эченә алалар. Андый аңлатмаларны *вакланмалы аңлатмалар* дип атыйлар.

Бөтен һәм вакланмалы аңлатмаларны *рациональ аңлатмалар* дип атыйлар.

Бөтен аңлатманың үзенә кергән үзгәрешлеләрнең теләсә нинди кыйммәтләрен алганда да мәгънәсе саклана, чөнки бөтен аңлатманың кыйммәтен табу өчен, һәрвакыт эшләп була торган гамәлләр кулланыла.

Үзгәрешлеләрнең кайбер кыйммәтләре өчен вакланмалы аңлатманың мәгънәсе булмаска да

мөмкин. Мәсәлән, $10+\frac{1}{a}$ аңлатмасының $a=0$ булганда, мәгънәсе юк. a ның барлык башка кыйммәтләрен биргәндә, бу аңлатманың мәгънәсе бар. x һәм y үзгәрешлеләре $x \neq y$ булырлык кыйммәтләр алганда $x+\frac{y}{x-y}$ аңлатмасының мәгънәсе бар. Үзгәрешлеләрнең аңлатманың мәгънәсе булырлык кыйммәтләрен *үзгәрешлеләрнең мөмкин саналган кыйммәтләре* дип атыйлар.

Санаучысы һәм ваклаучысы күпбуыннар булган вакланма рациональ аңлатманың аерым бер төре булып тора. Андый вакланмаларны *рациональ вакланмалар* дип атыйлар.

$$\frac{5}{a},\ \frac{b-3}{10},\ \frac{x+y}{x^2-xy+y^2},\ \frac{3}{m^2-n^2}$$

вакланмалары рациональ вакланмаларга мисал булып торалар. Вакланманың ваклаучысын нульгә әйләндерми торган үзгәрешлеләрнең кыйммәтләре рациональ вакланмада мөмкин саналган кыйммәтләр булып тора.

1 нче мисал $\frac{5}{a(a-9)}$ вакланмасында үзгәрешленең мөмкин саналган кыйммәтләрен табыйк.

▶ a ның нинди кыйммәтләрен биргәндә вакланманың ваклаучысы нульгә әйләнүен табу өчен $a(a-9)=0$ тигезләмәсен чишәргә кирәк.

Бу тигезләмәнең ике тамыры бар: 0 һәм 9. Димәк, 0 һәм 9 дан башка барлык саннар a үзгәрешлесенең мөмкин саналган кыйммәтләре була. ◁

2 нче мисал $a=\frac{2}{3}$, $b=-1{,}5$ булганда, $\frac{3a-b}{2ab}$ вакланмасының кыйммәтен табыйк:

▶ $$\frac{3a-b}{2ab}=\frac{3\cdot\frac{2}{3}-(-1{,}5)}{2\cdot\frac{2}{3}(-1{,}5)}=\frac{2+1{,}5}{\frac{2}{3}(-3)}=\frac{3{,}5}{-2}=-1{,}75$$ ◁

ИСААК НЬЮТОН (1643–1727)

— инглиз математигы, механигы, астрономы һәм физигы. Лейбництан бәйсез рәвештә математик анализ нигезләрен эшкәрткән, классик механиканың төп законнарын уйлап тапкан, бөтендөнья тартылу законын ачкан.

Күнегүләр

1 $\frac{1}{3}a^2b$, $(x-y)^2-4xy$, $\frac{m+3}{m-3}$, $\frac{8}{x^2+y^2}$, $\frac{a^2-2ab}{12}$, $(c+3)^2+\frac{2}{c}$ аңлатмаларыннан кайсылары бөтен, кайсылары вакланмалы?

2 $7x^2-2xy$, $\frac{a}{9}$, $\frac{12}{b}$, $a(a-b)-\frac{b}{3a}$, $\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{3}n^2$, $\frac{a}{a+3}-8$ рациональ анлатмалары арасыннан
а) бөтен аңлатмаларны;
б) вакланмалы аңлатмаларны язып алыгыз.

3 $y=3$; 1; −5; $\frac{1}{2}$; −1,6; 100 булганда, $\frac{y-1}{y}$ вакланмалы аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

4 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\frac{a-8}{2a+5}$, $a=-2$ булганда;   в) $x+\frac{8}{x-1}$, $x=\frac{1}{2}$ булганда;

б) $\frac{b^2+6}{2b}$, $b=3$ булганда;   г) $\frac{y+3}{y}-\frac{y}{y-3}$, $y=1{,}5$ булганда.

5 а) $a=-3$, $b=-1$;   б) $a=1\frac{1}{2}$, $b=0{,}5$ булганда,

$\frac{(a+b)^2-1}{a^2+1}$ вакланмасының кыйммәте күпмегә тигез?

6 Таблицаны тутырыгыз:

x	−13	−5	−0,2	0	$\frac{1}{17}$	1	$5\frac{2}{3}$	7
$\frac{x+5}{x-3}$								

7 α нульгә якын булганда, $\frac{1}{1+\alpha}$ вакланмасының кыйммәтләрен исәпләү өчен, $\frac{1}{1+\alpha}\approx 1-\alpha$ якынча тигезлегеннән файдаланалар. Бу тигезлекне кулланып, вакланманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\frac{1}{1{,}01}$;   б) $\frac{1}{1{,}002}$;   в) $\frac{1}{0{,}99}$;   г) $\frac{1}{0{,}997}$.

8 t сәгать эчендә поезд s километр юл үтә. Поездның уртача тизлеге v ны (км/сәг ләрдә) s һәм t аша күрсәтегез. Әгәр
а) $t=3$, $s=180$;   б) $t=2{,}5$, $s=225$
булса, v ны табыгыз.

9 Аралары s километр булган A һәм B шәһәрләреннән бер үк вакытта кара-каршы ике поезд юлга чыга. Беренчесе v_1 км/сәг тизлек белән, ә икенчесе v_2 км/сәг тизлек белән

бара. Алар t сәгатьтән соң очрашалар. t үзгәрешлесен s, v_1 һәм v_2 аша күрсәтегез. Әгәр

а) $s = 250$, $v_1 = 60$, $v_2 = 40$; б) $s = 310$, $v_1 = 75$, $v_2 = 80$

икәне билгеле булса, t ның кыйммәтен табыгыз.

10 Вакланма төзегез:

а) санаучысы x һәм y үзгәрешлеләренең тапкырчыгышы, ә ваклаучысы аларның суммасы булсын;

б) санаучысы a һәм b үзгәрешлеләренең аермасы, ә ваклаучысы аларның тапкырчыгышы булсын.

11 Үзгәрешле нинди кыйммәтләргә ия булганда, рациональ аңлатманың мәгънәсе бар:

а) $\frac{x}{x-2}$; в) $\frac{y^2-1}{y}+\frac{y}{y-3}$;

б) $\frac{b+4}{b^2+7}$; г) $\frac{a+10}{a(a-1)}-1$?

12 Аңлатмадагы үзгәрешленең мөмкин саналган кыйммәтләрен күрсәтегез:

а) x^2-8x+9; в) $\frac{3x-6}{7}$; д) $\frac{x-5}{x^2+25}-3x$;

б) $\frac{1}{6x-3}$; г) $\frac{x^2-8}{4x(x+1)}$; е) $\frac{x}{x+8}+\frac{x-8}{x}$.

13 Аңлатмадагы үзгәрешленең мөмкин саналган кыйммәтләрен табыгыз:

а) $\frac{5y-8}{11}$; в) $\frac{y^2+1}{y^2-2y}$; д) $\frac{y}{y-6}+\frac{15}{y+6}$;

б) $\frac{25}{y-9}$; г) $\frac{y-10}{y^2+3}$; е) $\frac{32}{y}-\frac{y+1}{y+7}$.

14 Функциянең билгеләнү өлкәсен табыгыз:

а) $y=\frac{1}{x-2}$; б) $y=\frac{2x+3}{x(x+1)}$; в) $y=x+\frac{1}{x+5}$.

15 Үзгәрешле нинди кыйммәткә ия булганда, $\frac{x-3}{5}$ вакланмасының кыйммәте

а) 1 гә; б) 0 гә; в) -1 гә; г) 3 кә тигез була?

16 Үзгәрешле нинди кыйммәтләргә ия булганда,

а) $\frac{y-5}{8}$; б) $\frac{2y+3}{10}$; в) $\frac{x(x-1)}{x+4}$; г) $\frac{x(x+3)}{x-5}$

вакланмасының кыйммәте нульгә тигез?

17 а) $a > 0$ һәм $b > 0$; в) $a < 0$ һәм $b > 0$;

б) $a > 0$ һәм $b < 0$; г) $a < 0$ һәм $b < 0$

икәне билгеле булса, $\frac{a}{b}$ вакланмасының тамгасын билгеләгез.

18 Үзгәрешләнең теләсә нинди кыйммәте өчен вакланманың кыйммәте түбәндәгечә булуын исбатлагыз:

а) $\frac{3}{x^2+1}$ уңай; в) $\frac{(a-1)^2}{a^2+10}$ тискәре түгел;

б) $\frac{-5}{y^2+4}$ тискәре; г) $\frac{(b-3)^2}{-b^2-1}$ уңай түгел.

19 Калькулятор ярдәмендә вакланманың кыйммәтен табыгыз:

а) $x = 2{,}47$ булганда, $\frac{2x-3}{3x+2}$ нең;

б) $x = 3{,}18$ булганда, $\frac{7x+9}{8x-1}$ нең.

Нәтиҗәләрне йөзенче өлешләргә кадәр түгәрәкләгез.

Кабатлау өчен күнегүләр

20 Күпбуын рәвешендә күрсәтегез:

а) $(x-10)(x+10)$; д) $(x+7)^2$;
б) $(2a+3)(2a-3)$; е) $(b+5)^2$;
в) $(y-5b)(y+5b)$; ж) $(a-2x)^2$;
г) $(8x+y)(y-8x)$; з) $(ab-1)^2$.

21 Күпбуынны тапкырлаучыларга таркатыгыз:

а) $15ax+20ay$; в) x^2-xy; д) a^2+5ab;
б) $36by-9cy$; г) $xy-y^2$; е) $15c-10c^2$.

22 Тапкырлаучыларга таркатыгыз:

а) x^2-25; в) a^2-6a+9; д) a^3-8;
б) $16-c^2$; г) $x^2+8x+16$; е) b^3+27.

2. Вакланманың төп үзлеге. Вакланмаларны кыскарту

Гади вакланмалар өчен без мондый үзлек үтәлгәнен беләбез: әгәр вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да бер үк натураль санга тапкырласаң, вакланманың кыйммәте үзгәрми. Башкача әйткәндә, a, b һәм c ның теләсә нинди натураль кыйммәтләре өчен $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ тигезлеге дөрес.

Бу тигезлекнең натураль кыйммәтләр алганда гына түгел, бәлки a, b һәм c ның ваклаучы нульгә тигез булмаганда, ягъни $b \neq 0$ һәм $c \neq 0$ булгандагы теләсә нинди кыйммәте өчен дә дөрес булуын исбатлыйк.

● $\frac{a}{b}=m$ булсын. Ул вакытта өлешнең билгеләмәсе буенча $a=bm$. Бу тигезлекнең ике кисәген дә c га тапкырлыйк: $ac=(bm)c$.

Тапкырлауның урын алыштыру һәм оештыру үзлекләре нигезендә табабыз:

$$ac = (bc)\,m.$$

$bc \neq 0$, шуңа күрә өлешнең билгеләмәсе буенча

$$\frac{ac}{bc} = m.$$

Шулай булгач,

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

Димәк,

a, b һәм c ның (биредә $b \neq 0$ һәм $c \neq 0$) теләсә нинди кыйммәтләре өчен

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \qquad (1)$$

тигезлеге дөрес.

Үзгәрешлеләрнең теләсә нинди кыйммәтләре өчен дөрес булган тигезлекләрне элек без бердәйлекләр дип атый идек. (1) тигезлеге үзгәрешлеләрнең барлык кыйммәтләре өчен дә дөрес, бу вакытта үзгәрешлеләрнең мөмкин саналган барлык кыйммәтләре өчен дә тигезлекнең уң кисәгенең дә һәм сул кисәгенең дә мәгънәсе була. Андый тигезлекләрне шулай ук бердәйлекләр дип атыйлар.

Билгеләмә. Аңлатмага кергән үзгәрешлеләрнең мөмкин саналган барлык кыйммәтләре өчен дөрес тигезлек бердәйлек дип атала.

Үзгәрешлеләрнең мөмкин саналган барлык кыйммәтләре өчен үзара тигез кыйммәтләр алган ике аңлатманы *бердәй тигез* дип, ә бер аңлатманы шундый икенче аңлатма белән алыштыруны *аңлатманы бердәй үзгәртү* дип атыйлар.

Без үзгәрешлеләрнең мөмкин саналган барлык кыйммәтләре өчен дә (1) тигезлегенең дөрес булуын исбатладык. Димәк, бу тигезлек бердәйлек була. $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ бердәйлеге белән күрсәтелгән үзлекне *вакланманың төп үзлеге* дип атыйлар.

(1) бердәйлегендә аның сул һәм уң кисәкләренең урыннарын алыштырып табабыз:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

Бу бердәйлек $\frac{ac}{bc}$ рәвешендәге вакланманы аңа бердәй тигез $\frac{a}{b}$ вакланмасы белән алыштырырга, яки мондый очракларда әйтелгәнчә, $\frac{ac}{bc}$ вакланмасының санаучысын да, ваклаучысын да уртак тапкырлаучы c га кыскартырга мөмкинлек бирә. Мисаллар китерик.

1 нче мисал $\frac{21y}{3y^2}$ вакланмасын кыскартыйк.

▶ Бу вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да бер үк $3y$ тапкырлаучысын эченә алган тапкырчыгышлар рәвешендә күрсәтик һәм вакланманы бу тапкырлаучыга кыскартыйк:

$$\frac{21y}{3y^2} = \frac{7 \cdot 3y}{y \cdot 3y} = \frac{7}{y}. \triangleleft$$

2 нче мисал $\frac{a^2-9}{ab+3b}$ вакланмасын кыскартыйк.

▶ Бу вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да тапкырлаучыларга таркатыйк:

$$\frac{a^2-9}{ab+3b} = \frac{(a+3)(a-3)}{b(a+3)}.$$

Килеп чыккан вакланманы $a + 3$ уртак тапкырлаучысына кыскартыйк:

$$\frac{(a+3)(a-3)}{b(a+3)} = \frac{a-3}{b}.$$

Шулай итеп,

$$\frac{a^2-9}{ab+3b} = \frac{a-3}{b}. \triangleleft$$

(1) бердәйлеге вакланмаларны бирелгән ваклаучыга китерү өчен дә файдаланыла.

3 нче мисал $\frac{2x}{7y}$ вакланмасын $35y^3$ ваклаучысына китерик.

▶ $35y^3 = 7y \cdot 5y^2$ булганга күрә, $\frac{2x}{7y}$ вакланмасының санаучысын да, ваклаучысын да $5y^2$ ка тапкырлап табабыз:

$$\frac{2x}{7y} = \frac{2x \cdot 5y^2}{7y \cdot 5y^2} = \frac{10xy^2}{35y^3}. \triangleleft$$

$5y^2$ тапкырлаучысын $\frac{2x}{7y}$ вакланмасының санаучысына һәм ваклаучысына өстәмә тапкырлаучы дип атыйлар.

4 нче мисал $\frac{5}{2y-x}$ вакланмасын $x - 2y$ ваклаучысына китерик.

▶ Моның өчен әлеге вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да -1 гә тапкырлыйк:

$$\frac{5}{2y-x} = \frac{5 \cdot (-1)}{(2y-x) \cdot (-1)} = \frac{-5}{x-2y}.$$

$\frac{-5}{x-2y}$ вакланмасын вакланма алдына «минус» тамгасы куеп һәм санаучының тамгасын үзгәртеп, аңа бердәй тигез булган $-\frac{-5}{x-2y}$ аңлатмасы белән алыштырырга мөмкин:

$$\frac{-5}{x-2y} = -\frac{5}{x-2y}. \triangleleft$$

Гомумән,

әгәр вакланма санаучысының тамгасын (яки ваклаучысының тамгасын) һәм вакланма алдындагы тамганы үзгәртсәк, бирелгәнгә бердәй тигез аңлатма килеп чыга.

Күнегүләр

23 Санаучы белән ваклаучының уртак тапкырлаучысын күрсәтегез һәм вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{2x}{3x}$; в) $\frac{6a}{24a}$; д) $\frac{-2xy}{5x^2y}$;

б) $\frac{15x}{25y}$; г) $\frac{7ab}{21bc}$; е) $\frac{8x^2y^2}{2xy}$.

24 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{10xz}{15yz}$; в) $\frac{2ay^3}{-4a^2b}$; д) $\frac{-ax^2}{xy}$; ж) $\frac{24a^2c^2}{36ac}$;

б) $\frac{6ab^2}{9bc^2}$; г) $\frac{-6p^2q}{-2q^3}$; е) $\frac{3axy}{6ay^3}$; з) $\frac{63x^2y^3}{42x^6y^4}$.

25 Өлешне вакланма рәвешендә күрсәтегез һәм вакланманы кыскартыгыз:

а) $4a^2b^3 : (2a^4b^2)$; г) $36m^2n : (18mn)$;

б) $3xy^2 : (6x^3y^3)$; д) $-32b^5c : (12b^4c^2)$;

в) $24p^4q^4 : (48p^2q^2)$; е) $-6ax : (-18ax)$.

26 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{8b}{24c}$; в) $\frac{4a^2}{6ac}$; д) $\frac{a^5b^3}{a^3b^5}$; ж) $\frac{56m^2n^5}{35mn^5}$;

б) $\frac{5ay}{15by}$; г) $\frac{7x^2y}{21xy^2}$; е) $\frac{x^6y^4}{x^4y^6}$; з) $\frac{25p^4q}{100p^5q}$.

27 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\frac{8^{16}}{16^{12}}$; б) $\frac{81^{25}}{27^{33}}$.

28 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{a(b-2)}{5(b-2)}$; б) $\frac{3(x+4)}{c(x+4)}$; в) $\frac{ab(y+3)}{a^2b(y+3)}$; г) $\frac{15a(a-b)}{20b(a-b)}$.

29 Вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да тапкырлаучыларга таркатыгыз һәм аны кыскартыгыз:

а) $\frac{3a+12b}{6ab}$; в) $\frac{2a-4}{3(a-2)}$; д) $\frac{a-3b}{a^2-3ab}$;

б) $\frac{15b-20c}{10b}$; г) $\frac{5x(y+2)}{6y+12}$; е) $\frac{3x^2+15xy}{x+5y}$.

30 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{y^2-16}{3y+12}$; в) $\frac{(c+2)^2}{7c^2+14c}$; д) $\frac{a^2+10a+25}{a^2-25}$;

б) $\frac{5x-15y}{x^2-9y^2}$; г) $\frac{6cd-18c}{(d-3)^2}$; е) $\frac{y^2-9}{y^2-6y+9}$.

31 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}$; б) $\frac{a^3-b^3}{a-b}$.

32 а) $a=-2$, $b=-0{,}1$ булганда, $\frac{15a^2-10ab}{3ab-2b^2}$;

б) $c=\frac{2}{3}$, $d=\frac{1}{2}$ булганда, $\frac{9c^2-4d^2}{18c^2d-12cd^2}$;

в) $x=\frac{2}{3}$, $y=-0{,}4$ булганда, $\frac{6x^2+12xy}{5xy+10y^2}$;

г) $x=-0{,}2$, $y=-0{,}6$ булганда, $\frac{x^2+6xy+9y^2}{4x^2+12xy}$

аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

33 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{x(y-7)}{y(y-7)}$; г) $\frac{p^2-25q^2}{2p-10q}$; ж) $\frac{a^2+a+1}{a^3-1}$;

б) $\frac{10a-15b}{16a-24b}$; д) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x}$; з) $\frac{b+2}{b^3+8}$.

в) $\frac{2m+14}{m^2-49}$; е) $\frac{3y^2+24y}{y^2+16y+64}$;

34 Өлешне вакланма рәвешендә күрсәтегез һәм вакланманы кыскартыгыз:

а) $(9x^2-y^2):(3x+y)$; в) $(x^2+2x+4):(x^3-8)$;
б) $(2ab-a):(4b^2-4b+1)$; г) $(1+a^3):(1+a)$.

35 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{2x+bx-2y-by}{7x-7y}$; в) $\frac{xy-x+y-y^2}{x^2-y^2}$;

б) $\frac{8a+4b}{2ab+b^2-2ad-bd}$; г) $\frac{a^2+2ac+c^2}{a^2+ac-ax-cx}$.

36 $\frac{-x}{-y}, \frac{-x}{y}, \frac{x}{-y}, -\frac{-x}{y}$ аңлатмалары арасыннан

а) $\frac{x}{y}$ вакланмасына бердәй тигез;

б) $\frac{x}{y}$ вакланмасына капма-каршы булганнарын язып алыгыз.

37 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{a-b}{b-a}$; в) $\frac{(a-b)^2}{b-a}$; д) $\frac{(-a-b)^2}{a+b}$;

б) $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2}$; г) $\frac{a-b}{(b-a)^2}$; е) $\frac{(a+b)^2}{(-a-b)^2}$.

38 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{a(x-2y)}{b(2y-x)}$; г) $\frac{7b-14b^2}{42b^2-21b}$; ж) $\frac{8b^2-8a^2}{a^2-2ab+b^2}$;

б) $\frac{5x(x-y)}{x^3(y-x)}$; д) $\frac{25-a^2}{3a-15}$; з) $\frac{(b-2)^3}{(2-b)^2}$.

в) $\frac{3a-36}{12b-ab}$; е) $\frac{3-3x}{x^2-2x+1}$;

39 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{ax+bx-ay-by}{bx-by}$; в) $\frac{7p-35}{15-3p}$; д) $\frac{4-x^2}{10-5x}$;

б) $\frac{ab-3b-2a+6}{15-5a}$; г) $\frac{18a-3a^2}{8a^2-48a}$; е) $\frac{a^2-6a+9}{27-a^3}$.

40 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{x^6+x^4}{x^4+x^2}$; б) $\frac{y^6-y^8}{y^4-y^2}$; в) $\frac{b^7-b^{10}}{b^5-b^2}$; г) $\frac{c^6-c^4}{c^3-c^2}$.

41 а) $a=-\frac{1}{2}$ булганда, $\frac{a^6+a^5}{a^3+a^2}$;

б) $b=-0{,}1$ булганда, $\frac{b^{10}-b^8}{b^8-b^6}$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

42 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{(2a-2b)^2}{a-b}$; б) $\frac{(3c+9d)^2}{c+3d}$; в) $\frac{(3x+6y)^2}{5x+10y}$; г) $\frac{4x^2-y^2}{(10x+5y)^2}$.

43 Түбәндәге вакланмаларны $24a^3b^2$ ваклаучысына китерегез:

$$\frac{5b}{8a^3}, \frac{7a}{3b^2}, \frac{1}{2ab}, \frac{2}{a^2b^2}.$$

44 $2a+b$ аңлатмасын ваклаучысы а) b га; б) 5 кә; в) $3a$ га; г) $2a-b$ га тигез булган вакланма рәвешендә күрсәтегез.

45 а) $\frac{x}{a-b}$ вакланмасын $(a-b)^2$ ваклаучысына;

б) $\frac{y}{x-a}$ вакланмасын x^2-a^2 ваклаучысына;

в) $\frac{2y}{x-1}$ вакланмасын x^3-1 ваклаучысына;

г) $\frac{3a}{a^2+ab+b^2}$ вакланмасын a^3-b^3 ваклаучысына;

д) $\frac{7}{y-b}$ вакланмасын $b-y$ ваклаучысына;

е) $\frac{a}{a-10}$ вакланмасын $10-a$ ваклаучысына;

ж) $\frac{p}{p-2}$ вакланмасын $4-p^2$ ваклаучысына;

з) $\frac{a+3}{6-2a}$ вакланмасын $2(a^2-9)$ ваклаучысына китерегез.

46 а) $\frac{8}{3xy^2}$ вакланмасын $15x^2y^2$ ваклаучысына;

б) $\frac{b}{7a^2c}$ вакланмасын $35a^3c^3$ ваклаучысына;

в) $\frac{a}{a-2}$ вакланмасын a^2-2a ваклаучысына;

г) $\frac{1}{x+1}$ вакланмасын x^3+1 ваклаучысына;

д) $\frac{12}{y-x}$ вакланмасын $x-y$ ваклаучысына;

е) $\frac{a}{a-4}$ вакланмасын $16-a^2$ ваклаучысына китерегез.

Кабатлау өчен күнегүләр

47 Тигезләмәне чишегез:

а) $-5x=16$; в) $\frac{1}{3}x=4$; д) $0{,}6x=3$;

б) $2x=\frac{1}{5}$; г) $4x=-2$; е) $-0{,}7x=5$.

48 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $6b^2-(2b+5)(3b-7)$;
б) $16x^2-(4x+0{,}5)(4x-0{,}5)$;
в) $2y(y-1{,}5x)-5(x+4y)(y-x)$;
г) $3(a-2b)(2b+a)-0{,}5b(a-24b)$.

49 Тапкырлаучыларга таркатыгыз:

а) $5bc - 5c$; г) $5y - 5x + y^2 - xy$; ж) $y^2 - 2y + 1$;

б) $10n + 15n^2$; д) $a^2 - 9$; з) $a^3 + 64$;

в) $8ab + 12bc$; е) $x^2 + 10x + 25$; и) $b^3 - 1$.

50 Исәпләмичә генә аңлатмаларны кыйммәтләре үсә бару тәртибендә урнаштырыгыз:

$$\frac{5}{16} : 6, \quad \frac{5}{16} \cdot 0{,}1, \quad \frac{5}{16} \cdot (-7).$$

Контроль сораулар

1 Бөтен аңлатмаларга, вакланмалы аңлатмаларга мисаллар китерегез.
2 Нинди вакланманы рациональ вакланма дип атыйлар? Мисал китерегез.
3 Бердәйлеккә билгеләмә бирегез. Мисал китерегез.
4 Вакланманың төп үзлеген әйтегез һәм исбатлагыз.
5 Вакланма алдындагы тамганы үзгәртү турындагы кагыйдәне әйтегез.

§ 2. Вакланмаларның суммасы һәм аермасы

3. Ваклаучылары бертөрле булган вакланмаларны кушу һәм алу

Ваклаучылары бертөрле булган гади вакланмаларны кушканда аларның санаучыларын кушалар, ә ваклаучыны үзгәрешсез калдыралар. Мәсәлән,

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}.$$

Ваклаучылары бертөрле булган рациональ вакланмаларны да шулай ук кушалар:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Үзгәрешлеләр мөмкин саналган теләсә нинди кыйммәткә ия булганда да, ягъни $c \neq 0$, бу тигезлекнең дөрес икәнен исбатлыйк.

● $\frac{a}{c} = m$, $\frac{b}{c} = n$ булсын. Ул вакытта өлешнең билгеләмәсе буенча $a = cm$, $b = cn$. Моннан $a + b = cm + cn = c(m + n)$, ягъни $a + b = c\,(m + n)$.

$c \neq 0$ булганга күрә, өлешнең билгеләмәсе буенча

$$m + n = \frac{a+b}{c}.$$

Димәк, $c \neq 0$ булганда,

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}. \bigcirc$$

Без бердәйлек таптык, аннан ваклаучылары бертөрле булган вакланмаларны кушу кагыйдәсе чыга:

ваклаучылары бертөрле булган вакланмаларны кушу өчен, аларның санаучыларын кушарга, ә ваклаучының үзен калдырырга кирәк.

Бу кагыйдә ваклаучылары бертөрле булган теләсә никадәр сандагы вакланмаларны кушканда да кулланыла.

Ваклаучылары бертөрле булган вакланмаларны алу кушу кебек үк эшләнә.

a, b һәм c (биредә $c \neq 0$) теләсә нинди булганда да,

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

тигезлегенең дөрес икәнен исбатлыйк.

Моның өчен $\frac{a-b}{c}$ һәм $\frac{b}{c}$ вакланмаларының суммасы $\frac{a}{c}$ вакланмасына тигез булуын исбатлыйк. Дөрестән дә,

$$\frac{a-b}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a-b+b}{c} = \frac{a}{c}. \bigcirc$$

Исбатланган бердәйлектән ваклаучылары бертөрле булган вакланмаларны алу кагыйдәсе чыга:

ваклаучылары бертөрле булган вакланмаларны алу өчен, беренче вакланманың санаучысыннан икенче вакланманың санаучысын алырга, ә ваклаучының үзен калдырырга кирәк.

1 нче мисал. $\frac{3a-7b}{15ab}$ һәм $\frac{2a+2b}{15ab}$ вакланмаларын кушыйк:

$$\frac{3a-7b}{15ab} + \frac{2a+2b}{15ab} = \frac{3a-7b+2a+2b}{15ab} = \frac{5a-5b}{15ab} =$$

$$= \frac{5(a-b)}{15ab} = \frac{a-b}{3ab}. \triangleleft$$

2 нче мисал. $\frac{a^2+9}{5a-15}$ вакланмасыннан $\frac{6a}{5a-15}$ вакланмасын алыйк:

$$\frac{a^2+9}{5a-15} - \frac{6a}{5a-15} = \frac{a^2+9-6a}{5a-15} = \frac{(a-3)^2}{5(a-3)} = \frac{a-3}{5}. \triangleleft$$

3 нче мисал. $\frac{x^2-3}{x^2+2x}+\frac{2}{x^2+2x}-\frac{2x-1}{x^2+2x}$ аңлатмасын гадиләштерик.

▶ Биредә вакланмаларны кушканда һәм алганда эзлекле рәвештә башкармыйча, ә бергә эшләү җайлы:

$$\frac{x^2-3}{x^2+2x}+\frac{2}{x^2+2x}-\frac{2x-1}{x^2+2x}=\frac{x^2-3+2-(2x-1)}{x^2+2x}=$$

$$=\frac{x^2-1-2x+1}{x^2+2x}=\frac{x^2-2x}{x^2+2x}=\frac{x(x-2)}{x(x+2)}=\frac{x-2}{x+2}.\ \triangleleft$$

4 нче мисал. $\frac{3a}{2x-a}$ һәм $\frac{6x}{a-2x}$ вакланмаларын кушыйк.

▶ Вакланмаларның ваклаучылары капма-каршы аңлатмалар булып торалар. Икенче вакланманың ваклаучысы алдындагы һәм вакланма алдындагы тамгаларны үзгәртеп табабыз:

$$\frac{6x}{a-2x}=-\frac{6x}{2x-a}.$$

Хәзер ваклаучылары бертөрле булган вакланмаларны алу кагыйдәсен кулланып була:

$$\frac{3a}{2x-a}+\frac{6x}{a-2x}=$$

$$=\frac{3a}{2x-a}-\frac{6x}{2x-a}=\frac{3a-6x}{2x-a}=\frac{-3(2x-a)}{2x-a}=-3.\ \triangleleft$$

Күнегүләр

51 Кушу яки алу гамәлен башкарыгыз:

а) $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}$; в) $\frac{a}{y}+\frac{2a}{y}$; д) $\frac{x+y}{9}-\frac{x}{9}$;

б) $\frac{a}{5}-\frac{b}{5}$; г) $\frac{5b^2}{a}-\frac{13b^2}{a}$; е) $\frac{2c-x}{b}-\frac{x}{b}$.

52 Вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{m}{p}-\frac{m-p}{p}$; г) $\frac{11x-5}{14x}+\frac{3x-2}{14x}$;

б) $\frac{a+b}{6}-\frac{a-2b}{6}$; д) $\frac{7y-13}{10y}-\frac{2y+3}{10y}$;

в) $\frac{x+5}{9}-\frac{x+2}{9}$; е) $\frac{8c+25}{6c}+\frac{5-2c}{6c}$.

53 Аңлатманы вакланмага үзгәртегез:

а) $\frac{2x-3y}{4xy}+\frac{11y-2x}{4xy}$; б) $\frac{5a+b^5}{8b}-\frac{5a-7b^5}{8b}$;

в) $\frac{3x-y^4}{4y^5}-\frac{y^4+3x}{4y^5}$;

д) $\frac{7y-5}{12y}-\frac{10y-19}{12y}+\frac{10-15y}{12y}$;

г) $\frac{a-2}{8a}+\frac{2a+5}{8a}-\frac{3-a}{8a}$;

е) $\frac{11a-2b}{4a}+\frac{2a-3b}{4a}-\frac{a-b}{4a}$.

54 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{17-12x}{x}+\frac{10-x}{x}$;

б) $\frac{12p-1}{3p^2}-\frac{1-3p}{3p^2}$;

в) $\frac{6y-3}{5y}-\frac{y+2}{5y}$;

г) $\frac{b}{6}-\frac{3a-2b}{6}$;

д) $\frac{3p-q}{5p}-\frac{2p+6q}{5p}+\frac{p-4q}{5p}$;

е) $\frac{5c-2d}{4c}-\frac{3d}{4c}+\frac{d-5c}{4c}$;

ж) $\frac{2a}{b}-\frac{1-6a}{b}+\frac{13-8a}{b}$;

з) $\frac{4b-2}{3b}-\frac{2b-1}{3b}+\frac{1}{3b}$.

55 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{16}{x-4}-\frac{x^2}{x-4}$;

б) $\frac{25}{a+5}-\frac{a^2}{a+5}$;

в) $\frac{3a-1}{a^2-b^2}-\frac{3b-1}{a^2-b^2}$;

г) $\frac{x-3}{x^2-64}+\frac{11}{x^2-64}$;

д) $\frac{2a+b}{(a-b)^2}+\frac{2b-5a}{(a-b)^2}$;

е) $\frac{13x+6y}{(x+y)^2}-\frac{11x+4y}{(x+y)^2}$.

56 а) $\frac{(a+b)^2}{ab}-\frac{(a-b)^2}{ab}$ аңлатмасының 4 кә бердәй тигез;

б) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$ аңлатмасының 2 гә бердәй тигез икәнен исбатлагыз.

57 а) $x=97$ булганда, $\frac{x^2+1}{x-3}-\frac{10}{x-3}$;

б) $y=-5{,}1$ булганда, $\frac{y+7}{y^2-25}-\frac{2y+2}{y^2-25}$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

58 а) $a=10{,}25$ булганда, $\frac{a^2-43}{a-6}+\frac{7}{a-6}$;

б) $b=3{,}5$ булганда, $\frac{9b-1}{b^2-9}-\frac{5b-10}{b^2-9}$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

59 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{x}{y-1}+\frac{5}{1-y}$;

б) $\frac{a}{c-3}-\frac{6}{3-c}$;

в) $\frac{2m}{m-n}+\frac{2n}{n-m}$;

г) $\frac{5p}{2q-p}+\frac{10q}{p-2q}$;

д) $\frac{a^2+16}{a-4}+\frac{8}{4-a}$;

е) $\frac{x^2+9y^2}{x-3y}+\frac{6xy}{3y-x}$.

60 Вакланмаларны кушыгыз яки алыгыз:

а) $\frac{10p}{p-q}+\frac{3p}{q-p}$; в) $\frac{x-3}{x-1}-\frac{2}{1-x}$; д) $\frac{a}{a^2-9}+\frac{3}{9-a^2}$;

б) $\frac{5a}{a-b}+\frac{5b}{b-a}$; г) $\frac{a}{2a-b}+\frac{3a-b}{b-2a}$; е) $\frac{y^2}{y-1}+\frac{1}{1-y}$.

61 x ның мөмкин саналган барлык кыйммәтләре өчен аңлатманың кыйммәте x ка бәйле түгеллеген исбатлагыз:

а) $\frac{3x+5}{2x-1}+\frac{7x+3}{1-2x}$; б) $\frac{5x+1}{5x-20}+\frac{x+17}{20-5x}$.

62 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{x^2}{(x-5)^2}-\frac{25}{(5-x)^2}$; б) $\frac{x^2+25}{(x-5)^3}+\frac{10x}{(5-x)^3}$.

63 Аңлатманы вакланмага үзгәртегез:

а) $\frac{x^2}{x^2-16}-\frac{8(x-2)}{x^2-16}$; б) $\frac{64-2ab}{(a-8)^2}+\frac{2ab-a^2}{(8-a)^2}$.

64 $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ бердәйлегеннән файдаланып, түбәндәге вакланмаларны аларның суммасы рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{a+b}{x}$; б) $\frac{2a^2+a}{y}$; в) $\frac{x^2+6y^2}{2xy}$; г) $\frac{12a+y^2}{6ay}$.

65 Түбәндәге вакланмаларны вакланмаларның суммасы яки аермасы рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{x^2+y^2}{x^4}$; б) $\frac{2x-y}{b}$; в) $\frac{a^2+1}{2a}$; г) $\frac{a^2-3ab}{a^3}$.

Кабатлау өчен күнегүләр

66 а) $a=2$; б) $a=-\frac{1}{3}$ булганда, $\frac{3a^2}{2a-1}$ вакланмасының кыйммәтен табыгыз.

67 Тигезләмәне чишегез:
а) $3(5x-4)-8x=4x+9$;
б) $19x-8(x-3)=66-3x$;
в) $0{,}2(0{,}7x-5)+0{,}02=1{,}4(x-1{,}6)$;
г) $2{,}7(0{,}1x+3{,}2)+0{,}6(1{,}3-x)=16{,}02$.

68 Тапкырлаучыларга таркатыгыз:
а) $8x^4-16x^3y$; г) $18b^2-98a^2$; ж) $ab+8a+9b+72$;
б) $15xy^5+10y^2$; д) x^3-125; з) $6m-12-2n+mn$.
в) $8a^2-50y^2$; е) y^3+8;

69 Аңлатмада үзгәрешленең мөмкин саналган кыйммәтләрен күрсәтегез:

а) $\frac{3a}{2a+25}$; б) $\frac{2y}{9+y^2}$; в) $\frac{5x}{3x(x+12)}$; г) $\frac{7a}{(a+1)(a-4)}$.

4. Ваклаучылары төрле булган вакланмаларны кушу һәм алу

Ваклаучылары төрле булган вакланмаларны кушуны һәм алуны ваклаучылары бертөрле булган вакланмаларны кушуга һәм алуга кайтарып калдырырга була.

$\frac{a}{b}$ һәм $\frac{c}{d}$ вакланмаларын кушарга кирәк булсын. Бу вакланмаларны бер үк уртак bd ваклаучысына китерәбез. Моның өчен беренче вакланманың санаучысын һәм ваклаучысын d га, ә икенче вакланманың санаучысын һәм ваклаучысын b га тапкырлыйбыз. Табабыз:

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \; \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}.$$

Хәзер ваклаучылары бертөрле булган вакланмаларны кушу кагыйдәсеннән файдаланырга була:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Шулай итеп,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Ваклаучылары төрле булган вакланмаларны алганда да шулай ук эшлиләр:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}.$$

Димәк,

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}.$$

Ваклаучылары төрле булган вакланмаларны кушканда һәм алганда еш кына ваклаучыларның тапкырчыгышына караганда гадирәк булган уртак ваклаучы табып була.

1 нче мисал. $\frac{x}{4a^3b}$ һәм $\frac{5}{6ab^4}$ вакланмаларын кушыйк.

▶ Вакланмаларның ваклаучылары — бербуыннар, $12a^3b^4$ бербуыны иң гади уртак ваклаучы була. Бу бербуынның коэффициенты вакланмаларның ваклаучылары коэффициентларының иң кечкенә уртак кабатлысына тигез, ә вакланмаларның ваклаучыларына кергән һәр үзгәрешленең иң зур күрсәткечлесе алынган. Әлеге вакланмаларның санаучыларына һәм ваклаучыларына өстәмә тапкырлаучылар $3b^3$ һәм $2a^2$ ка тигез.

Табабыз:

$$\frac{x}{4a^3b}+\frac{5}{6ab^4}=\frac{x\cdot 3b^3+5\cdot 2a^2}{12a^3b^4}=\frac{3b^3x+10a^2}{12a^3b^4}. \ \triangleleft$$

2 нче мисал. $\frac{a+3}{a^2+ab}-\frac{b-3}{ab+b^2}$ аермасын үзгәртик.

▶ Вакланмаларны уртак ваклаучыга китерү өчен, һәр вакланманың ваклаучысын тапкырлаучыларга таркатабыз:

$$\frac{a+3}{a^2+ab}-\frac{b-3}{ab+b^2}=\frac{a+3}{a(a+b)}-\frac{b-3}{b(a+b)}.$$

$ab(a+b)$ аңлатмасы иң гади уртак ваклаучы була. Бу вакланмаларның санаучыларына һәм ваклаучыларына өстәмә тапкырлаучылар b һәм a га тигез.

Табабыз:

$$\frac{a+3}{a^2+ab}-\frac{b-3}{ab+b^2}=\frac{a+3}{a(a+b)}-\frac{b-3}{b(a+b)}=$$

$$=\frac{(a+3)b-(b-3)a}{ab(a+b)}=\frac{ab+3b-ab+3a}{ab(a+b)}=$$

$$=\frac{3(a+b)}{ab(a+b)}=\frac{3}{ab}. \ \triangleleft$$

Бөтен аңлатма белән вакланманың суммасы яки аермасы булган рациональ аңлатманы үзгәртү вакланмаларның суммасын яки аермасын үзгәртүгә кайтарып калдырыла.

3 нче мисал. $a-1-\frac{a^2-3}{a+1}$ аңлатмасын гадиләштерик.

▶ $a-1$ аңлатмасын ваклаучысы 1 булган вакланма рәвешендә күрсәтәбез дә вакланмаларны алабыз:

$$a-1-\frac{a^2-3}{a+1}=\frac{a-1}{1}-\frac{a^2-3}{a+1}=$$

$$=\frac{(a-1)(a+1)-(a^2-3)}{a+1}=\frac{a^2-1-a^2+3}{a+1}=\frac{2}{a+1}. \ \triangleleft$$

Күнегүләр

70 Вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$; г) $\frac{a}{b}-\frac{b^2}{a}$; ж) $\frac{5x}{8y}+\frac{x}{4y}$;

б) $\frac{c}{4}-\frac{d}{12}$; д) $\frac{3}{2x}-\frac{2}{3x}$; з) $\frac{17y}{24c}-\frac{25y}{36c}$;

в) $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$; е) $\frac{a}{5c}+\frac{3a}{4c}$; и) $\frac{5a}{18b}-\frac{7a}{45b}$.

71 Кушыгыз яки алыгыз:

а) $\frac{5y-3}{6y}+\frac{y+2}{4y}$; в) $\frac{b+2}{15b}-\frac{3c-5}{45c}$;

б) $\frac{3x+5}{35x}+\frac{x-3}{21x}$; г) $\frac{8b+y}{40b}-\frac{6y+b}{30y}$.

72 Аңлатманы вакланмага үзгәртегез:

а) $\frac{3x}{4}-\frac{5x}{9}$; в) $\frac{7a}{12b}-\frac{2a}{15b}$; д) $\frac{15a-b}{12a}-\frac{a-4b}{9a}$;

б) $\frac{6a}{5}-\frac{3a}{4}$; г) $\frac{9p}{10}-\frac{7p}{12}$; е) $\frac{7x+4}{8y}-\frac{3x-1}{6y}$.

73 Кушыгыз яки алыгыз:

а) $\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}$; в) $\frac{1}{2a^7}+\frac{4-2a^3}{a^{10}}$; д) $\frac{2a-3b}{a^2b}+\frac{4a-5b}{ab^2}$;

б) $\frac{1-x}{x^3}+\frac{1}{x^2}$; г) $\frac{a+b}{a^2}+\frac{a-b}{ab}$; е) $\frac{x-2y}{xy^2}-\frac{2y-x}{x^2y}$.

74 Вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{2xy-1}{4x^3}-\frac{3y-x}{6x^2}$; в) $\frac{1}{3a^3}-\frac{2}{5a^5}$;

б) $\frac{1-b^2}{3ab}+\frac{2b^3-1}{6ab^2}$; г) $\frac{b^2}{6x^5}-\frac{b}{3x^6}$.

75 Аңлатманы вакланмага үзгәртегез:

а) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$; в) $\frac{b-a}{ab}+\frac{c-b}{bc}-\frac{c-a}{ac}$;

б) $\frac{ab-b}{a}-\frac{ab-a}{b}-\frac{a^2-b^2}{ab}$; г) $\frac{3ab+2b^2}{ab}-\frac{a+2b}{a}+\frac{a-2b}{b}$.

76 Вакланмаларны алу гамәлен башкарыгыз:

а) $\frac{x-y}{xy}-\frac{x-z}{xz}$; г) $\frac{3m-n}{3m^2n}-\frac{2n-m}{2mn^2}$;

б) $\frac{a-2b}{3b}-\frac{b-2a}{3a}$; д) $\frac{3b+2c}{9b^2c}-\frac{2c-5b}{6bc^2}$;

в) $\frac{p-q}{p^3q^2}-\frac{p+q}{p^2q^3}$; е) $\frac{2x-7y}{2x^2y}-\frac{5y-8x}{5xy^2}$.

77 Аңлатманы вакланмага үзгәртегез:

а) $x+\frac{1}{y}$; в) $3a-\frac{a}{4}$; д) $\frac{a^2+b}{a}-a$; ж) $\frac{(a-b)^2}{2a}+b$;

б) $\frac{1}{a}-a$; г) $5b-\frac{2}{b}$; е) $2p-\frac{4p^2+1}{2p}$; з) $c-\frac{(b+c)^2}{2b}$.

78 Аңлатманы вакланмага үзгәртегез:

а) $5-\frac{c}{2}$; в) $a+b-\frac{a-3}{2}$;

б) $5y^2-\frac{15y^2-1}{3}$; г) $\frac{2b^2-1}{b}-b+5$.

79 Вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $1-\frac{a}{5}-\frac{b}{4}$;   г) $4a-\frac{a-1}{4}-\frac{a+2}{3}$;

б) $12-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$;   д) $\frac{a+b}{4}-a+b$;

в) $\frac{a-2}{2}-1-\frac{a-3}{3}$;   е) $a+b-\frac{a^2+b^2}{a}$.

80 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $x-\frac{x-y}{2}+\frac{x+y}{4}$;   в) $3-\frac{2x-y}{4}+\frac{x+4y}{12}$;

б) $\frac{3}{x}-2-\frac{5}{x}$;   г) $\frac{6a-4b}{5}-\frac{b+7a}{3}-2$.

81 Вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{b-c}{b}+\frac{b}{b+c}$;   в) $\frac{m}{m-n}-\frac{n}{m+n}$;   д) $\frac{a}{a+2}-\frac{a}{a-2}$;

б) $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x+3}{x}$;   г) $\frac{2a}{2a-1}-\frac{1}{2a+1}$;   е) $\frac{p}{3p-1}-\frac{p}{3p+1}$.

82 Аңлатманы вакланмага үзгәртегез:

а) $\frac{3x}{5(x+y)}-\frac{2y}{3(x+y)}$;   г) $\frac{13c}{bm-bn}-\frac{12b}{cn-cm}$;

б) $\frac{a^2}{5(a-b)}-\frac{b^2}{4(a-b)}$;   д) $\frac{a}{2x+4}-\frac{a}{3x+6}$;

в) $\frac{3}{ax-ay}+\frac{2}{by-bx}$;   е) $\frac{p}{7a-14}+\frac{1}{2-a}$.

83 Вакланмаларны кушыгыз яки алыгыз:

а) $\frac{p}{2x+1}-\frac{p}{3x-2}$;   в) $\frac{a}{5x-10}+\frac{a}{6x-12}$;

б) $\frac{6a}{x-2y}+\frac{2a}{x+y}$;   г) $\frac{5b}{12a-36}-\frac{b}{48-16a}$.

84 y ның мөмкин саналган барлык кыйммәтләре өчен аңлатманың кыйммәте y ка бәйле түгеллеген исбатлагыз:

а) $\frac{5y+3}{2y+2}-\frac{7y+4}{3y+3}$;   б) $\frac{11y+13}{3y-3}+\frac{15y+17}{4-4y}$.

85 Аңлатманы гадиләштерепез:

а) $\frac{a^2}{ax-x^2}+\frac{x}{x-a}$;   в) $\frac{b}{2a^2-ab}-\frac{4a}{2ab-b^2}$;

б) $\frac{b^2-4by}{2y^2-by}-\frac{4y}{b-2y}$;   г) $\frac{4y}{3x^2+2xy}-\frac{9x}{3xy+2x^2}$.

86 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{x-25}{5x-25}+\frac{3x+5}{x^2-5x}$;   в) $\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{ab+b^2}$;

б) $\frac{12-y}{6y-36}-\frac{6}{y^2-6y}$;   г) $\frac{1}{b^2-ab}-\frac{1}{ab-a^2}$.

87 Аңлатманы вакланмага үзгәртегез:

а) $1-\frac{a+b}{a-b}$; г) $a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b}$;

б) $\frac{a^2+b^2}{a-b}-a$; д) $x-\frac{9}{x-3}-3$;

в) $m-n+\frac{n^2}{m+n}$; е) $a^2-\frac{a^4+1}{a^2-1}+1$.

88 Вакланмаларны алу гамәлен башкарыгыз:

а) $\frac{a^2+3a}{ab-5b+8a-40}-\frac{a}{b+8}$; б) $\frac{y}{3x-2}-\frac{3y}{6xy+9x-4y-6}$.

89 Аңлатманы вакланмага үзгәртегез:

а) $\frac{x^2}{3ax-2-x+6a}-\frac{x}{3a-1}$; б) $\frac{3x}{2y+3}+\frac{x^2+3x}{4xy-3-2y+6x}$.

90 Вакланмаларны кушыгыз яки алыгыз:

а) $\frac{x^2-3xy}{(x+y)(x-y)}+\frac{y}{x-y}$; в) $\frac{a-2y}{a+y}-\frac{y^2-5ay}{a^2-y^2}$;

б) $\frac{c}{b-c}+\frac{b^2-3bc}{b^2-c^2}$; г) $\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{1}{a^2+a}$.

91 Аңлатманы вакланмага үзгәртегез:

а) $\frac{b-6}{4-b^2}+\frac{2}{2b-b^2}$; в) $\frac{x-12a}{x^2-16a^2}-\frac{4a}{4ax-x^2}$;

б) $\frac{b}{ab-5a^2}-\frac{15b-25a}{b^2-25a^2}$; г) $\frac{a-30y}{a^2-100y^2}-\frac{10y}{10ay-a^2}$.

92 Вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{a+4}{a^2-2a}-\frac{a}{a^2-4}$; г) $\frac{5b}{4a-5}+\frac{16ab+30b}{25-16a^2}$;

б) $\frac{4-x^2}{16-x^2}-\frac{x+1}{x+4}$; д) $\frac{(a+b)^2}{a^2+ab}+\frac{(a-b)^2}{a^2-ab}$;

в) $\frac{3}{2b+1}+\frac{b+7}{1-4b^2}$; е) $\frac{x^2-4}{5x-10}-\frac{x^2+4x+4}{5x+10}$.

93 Аңлатманы гадиләштерегез һәм $x=-1,5$ булганда,

а) $\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x+2}{x^2-1}$; б) $\frac{x+2}{x^2+3x}-\frac{1+x}{x^2-9}$

аның кыйммәтен табыгыз.

94 Вакланмаларны кушыгыз яки алыгыз:

а) $\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}-\frac{1}{a+b}$; в) $\frac{1-a}{a^2-a+1}+\frac{a^2}{a^3+1}$;

б) $\frac{1}{p-q}-\frac{3pq}{p^3-q^3}$; г) $\frac{6a^3+48a}{a^3+64}-\frac{3a^2}{a^2-4a+16}$.

95 Вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{4}{y+2}-\frac{3}{y-2}+\frac{12}{y^2-4}$;

в) $\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{x+y}{2x-2y}$;

б) $\frac{a}{a-6}-\frac{3}{a+6}+\frac{a^2}{36-a^2}$;

г) $\frac{b}{(a-b)^2}-\frac{a+b}{b^2-ab}$.

96 Аңлатманы вакланмага үзгәртегез:

а) $\frac{2a+b}{2a^2-ab}-\frac{16a}{4a^2-b^2}-\frac{2a-b}{2a^2+ab}$;

б) $\frac{1}{(a-3)^2}-\frac{2}{a^2-9}+\frac{1}{(a+3)^2}$;

в) $\frac{x-2}{x^2+2x+4}-\frac{6x}{x^3-8}+\frac{1}{x-2}$;

г) $\frac{2a^2+7a+3}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}-\frac{3}{a-1}$.

97 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{1}{a-4b}-\frac{1}{a+4b}-\frac{2a}{16b^2-a^2}$;

б) $\frac{1}{2b-2a}+\frac{1}{2b+2a}+\frac{a^2}{a^2b-b^3}$;

в) $\frac{1}{2x-b}+\frac{6bx}{b^3-8x^3}$;

г) $\frac{2y^2+16}{y^3+8}-\frac{2}{y+2}$.

98 Түбәндәге аңлатмаларның бердәй тигез икәнен исбатлагыз:

а) $\frac{3}{a^2-3a}+\frac{a^2}{a-3}$ һәм $a+3+\frac{9a+3}{a^2-3a}$;

б) $\frac{a^3}{a^2-4}-\frac{a}{a-2}-\frac{2}{a+2}$ һәм $a-1$.

99 Үзгәрешленең мөмкин саналган теләсә нинди кыйммәтләре өчен

а) $\frac{x^3+3x}{x+2}-\frac{3x^2-14x+16}{x^2-4}+2x$ аңлатмасының кыйммәте уңай сан;

б) $y+\frac{2y^2+3y+1}{y^2-1}-\frac{y^3+2y}{y-1}$ аңлатмасының кыйммәте тискәре сан булуын исбатлагыз.

100 Ике елга пристаньнары A һәм B бер-берсеннән s км ераклыкта урнашкан. Алар арасында торгын судагы тизлеге v км/сәг булган катер йөреп тора. Елганың агым тизлеге 5 км/сәг булса, катерга A дан B га бару һәм кире кайту өчен, күпме вакыт t (сәгатьләрдә) кирәк булыр?
а) $s=50$, $v=25$; б) $s=105$, $v=40$ булганда, t ны табыгыз.

101 Туристлар v км/сәг тизлек белән s км таш юлдан һәм аннан ике тапкыр озынрак булган авылара юлдан үткәннәр. Туристлар авылара юлдан, таш юлдан барганга караганда, 2 км/сәг кимрәк тизлек белән үтсәләр, алар күпме вакыт t (сәгатьләрдә) сарыф иткәннәр? $s = 10$, $v = 6$ булганда, t ны табыгыз.

Кабатлау өчен күнегүләр

102 а) $x = \frac{1}{2}$; б) $x = -1$ булганда, $\frac{2x^2+x-1}{4x^2-3x+2}$ вакланмасының кыйммәтен табыгыз.

103 Функция $y = \frac{2x-5}{3}$ формуласы белән бирелгән. x үзгәрешлесе -2 гә; 0 гә; 16 га тигез булганда, функциянең кыйммәтен табыгыз. x ның нинди кыйммәте өчен функциянең кыйммәте 3 кә; 0 гә; -9 га тигез?

104 Функция $y = \frac{1}{2}x - 4$ формуласы белән бирелгән. Аның графигын төзегез. График буенча

а) x ның кыйммәте 6 га, -6 га тигез булганда, функциянең кыйммәтен табыгыз;

б) x нинди кыйммәткә ия булганда, функциянең кыйммәте -2 гә; 0 гә тигез икәнен белегез.

105 Бер үк координаталар системасында $y = -4x + 1$ һәм $y = 2x - 3$ функцияләренең графикларын төзегез һәм аларның кисешү ноктасының координаталарын табыгыз. Шушы ук мәсьәләне функцияләрнең графикларын төземичә генә чишегез. Табылган нәтиҗәләрне чагыштырыгыз.

106 Ике силос чокыры бар. Беренче чокырга 90 т силос, икенчесенә 75 т силос салганнар. Беренче чокырдан икенчесенә караганда 3 тапкырга күбрәк силос алгач, беренче чокырда икенчедәгедән 2 тапкыр азрак силос калган. Беренче чокырдан ничә тонна силос алганнар?

107 а) $v = \frac{s}{t}$ формуласыннан s үзгәрешлесен v һәм t аша; t үзгәрешлесен s һәм v аша күрсәтегез;

б) $\rho = \frac{m}{v}$ формуласыннан v үзгәрешлесен ρ һәм m аша күрсәтегез.

Контроль сораулар

1 Ваклаучылары бертөрле булган вакланмаларны кушу кагыйдәсен әйтеп бирегез.

2 Ваклаучылары бертөрле булган вакланмаларны алу кагыйдәсен әйтеп бирегез.

3 Ваклаучылары төрле булган вакланмаларны кушу һәм алуны ничек башкаралар?

§ 2. Вакланмаларның тапкырчыгышы һәм өлеше

5. Вакланмаларны тапкырлау. Вакланманы дәрәҗәгә күтәрү

Гади вакланмаларны тапкырлаганда, аларның санаучыларын аерым, ваклаучыларын аерым тапкырлап, беренче тапкырчыгышны вакланманың санаучысына, ә икенчесен ваклаучысына язалар. Мәсәлән,

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot4}{3\cdot5}=\frac{8}{15}.$$

Теләсә нинди вакланмаларны да шулай ук тапкырлыйлар:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Үзгәрешлеләрнең мөмкин саналган барлык кыйммәтләре өчен, ягъни $b\neq0$ һәм $d\neq0$ булганда, бу тигезлекнең дөрес икәнен исбатлыйк.

● $\frac{a}{b}=m$, $\frac{c}{d}=n$ булсын. Ул вакытта өлеш билгеләмәсе буенча $a=bm$, $c=dn$. Моннан $ac=(bm)(dn)=$ $=(bd)(mn)$. Ләкин $bd\neq0$, шуңа күрә $ac=(bd)(mn)$ тигезлегеннән өлешнең билгеләмәсе буенча

$$mn=\frac{ac}{bd}.$$

Димәк, $b\neq0$ һәм $d\neq0$ булганда,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.\ \bigcirc$$

Без бердәйлек таптык, аннан вакланмаларны тапкырлау кагыйдәсе чыга:

вакланманы вакланмага тапкырлау өчен, аларның санаучыларын һәм ваклаучыларын аерым-аерым тапкырлап, беренче тапкырчыгышны вакланманың санаучысына, ә икенчесен ваклаучысына язарга кирәк.

[illegible] мисал. $\frac{a^3}{4b^2}$ вакланмасын $\frac{6b}{a^2}$ вакланмасына тапкырлыйк.

▶ Вакланмаларны тапкырлау кагыйдәсен кулланабыз:

$$\frac{a^3}{4b^2}\cdot\frac{6b}{a^2}=\frac{a^3\cdot6b}{4b^2\cdot a^2}=\frac{3a}{2b}.\ \triangleleft$$

2 нче мисал. $\frac{pm+2p}{m}$ вакланмасын $\frac{pm^2}{m^2-4}$ вакланмасына тапкырлыйк.

▶ Табабыз:

$$\frac{pm+2p}{m}\cdot\frac{pm^2}{m^2-4}=\frac{p(m+2)\,pm^2}{m\,(m-2)\,(m+2)}=\frac{p^2m}{m-2}.\ \triangleleft$$

3 нче мисал. $\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x+1}{x}$ тапкырчыгышын рациональ вакланма рәвешендә күрсәтик.

▶ Табабыз:

$$\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x+1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)\cdot x}=\frac{x^2-1}{x^2+2x}.\ \triangleleft$$

4 нче мисал. $\frac{x+a}{x-a}$ вакланмасын x^2-a^2 күпбуынына тапкырлыйк.

▶ Вакланманы күпбуынга тапкырлаганда, башта күпбуынны вакланма рәвешендә язалар һәм аннары вакланмаларны тапкырлау кагыйдәсен кулланалар.

$$\frac{x+a}{x-a}\cdot(x^2-a^2)=\frac{x+a}{x-a}\cdot\frac{x^2-a^2}{1}=$$

$$=\frac{(x+a)(x-a)(x+a)}{x-a}=(x+a)^2.\ \triangleleft$$

Вакланмаларны тапкырлауның бу кагыйдәсе тапкырлаучылары өч һәм аннан да күбрәк булган очрак өчен дә дөрес. Мәсәлән,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}=\frac{ac}{bd}\cdot\frac{m}{n}=\frac{acm}{bdn}.$$

Вакланманы дәрәҗәгә күтәрүгә мәсьәлә карыйк.

$\frac{a}{b}$ вакланмасының n нчы дәрәҗәсе булган $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ аңлатмасын үзгәртәбез.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

икәнен исбатлыйк.

● Дәрәҗәнең билгеләмәсе буенча

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\ \text{тапкыр}}$$

икәне билгеле.

Вакланмаларның тапкырлау кагыйдәсен һәм дәрәҗә билгеләмәсен кулланып табабыз:

$$\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\ \text{тапкыр}} = \frac{\overbrace{aa\ldots a}^{n\ \text{тапкыр}}}{\underbrace{bb\ldots b}_{n\ \text{тапкыр}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Димәк,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Исбатланган бердәйлектән вакланманы дәрәҗәгә күтәрү кагыйдәсе чыга:

вакланманы дәрәҗәгә күтәрү өчен, санаучыны да, ваклаучыны да дәрәҗәгә күтәреп, беренче нәтиҗәне вакланманың санаучысына, ә икенчесен ваклаучысына язалар.

[illegible] мисал. $\frac{2a^2}{b^4}$ вакланмасын өченче дәрәҗәгә күтәрик.

▶ Дәрәҗәгә күтәрү кагыйдәсен кулланабыз:

$$\left(\frac{2a^2}{b^4}\right)^3 = \frac{(2a^2)^3}{(b^4)^3} = \frac{8a^6}{b^{12}}. \triangleleft$$

Күнегүләр

108 Тапкырлагыз:

а) $\frac{5}{3a}\cdot\frac{2b}{3}$; в) $\frac{3x}{4}\cdot\frac{1}{x}$; д) $\frac{b^2}{10}\cdot\frac{5}{b}$; ж) $\frac{12x^3}{25}\cdot\frac{15}{8x^2}$;

б) $\frac{5a}{8y}\cdot\frac{7}{10}$; г) $\frac{9}{2a}\cdot\frac{5a}{3}$; е) $\frac{18}{c^4}\cdot\frac{c^3}{24}$; з) $\frac{3}{4a^3}\cdot\frac{16a^2}{9}$.

109 Вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{3x}{4y}\cdot\frac{10}{3x^2}$; в) $\frac{m^2}{16}\cdot\frac{24}{mn}$; д) $\frac{7a^3}{24b}\cdot 8b^2$;

б) $\frac{2,5}{2a^2}\cdot\frac{4a^3}{5b^2}$; г) $\frac{1}{9x^3}\cdot\frac{3x}{2a^2}$; е) $14ab\cdot\frac{1}{21b^3}$.

110 Тапкырлагыз:

а) $\frac{12}{5x}\cdot\frac{x^3}{12a}$; б) $\frac{8c^2}{15m}\cdot\frac{1}{4c^2}$; в) $\frac{11a^4}{6}\cdot\frac{12b}{a^5}$; г) $\frac{4n^2}{3m^2}\cdot\frac{9m}{2}$.

111 Аңлатманы вакланмага үзгәртегез:

а) $15x^2\cdot\frac{7}{6x^3}$; в) $6am^2\cdot\frac{4a}{3m^3}$;

б) $\frac{25}{16y^2}\cdot 2y^3$; г) $\frac{2b}{5a^3}\cdot 10a^2$.

112 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{48x^5}{49y^4} \cdot \frac{7y^2}{16x^3}$;

б) $\frac{18m^3}{11n^3} \cdot \frac{22n^4}{9m^2}$;

в) $-\frac{15p^4}{8q^6} \cdot \frac{16q^5}{25p^3}$;

г) $\frac{72x^4}{25y^5} \cdot \left(-\frac{2,5y^4}{27x^5}\right)$;

д) $-\frac{35ax^2}{12b^2y} \cdot \frac{8ab}{21xy}$;

е) $-\frac{25x^3y^3}{14a^2b} \cdot \left(-\frac{21ab}{10x^2y^2}\right)$.

113 Тапкырлагыз:

а) $\frac{14a^2b}{3x^3} \cdot \frac{8x^2}{21a^2b}$;

б) $\frac{9a^2}{25x^2y} \cdot \frac{5ax^3}{6y}$;

в) $-\frac{10x^2y^2}{9a^2} \cdot \frac{27a^3}{5xy}$;

г) $\frac{2m^3}{35a^3b^2} \cdot \left(-\frac{7a^2b}{6m^3}\right)$;

д) $\frac{13x}{12mn^2} \cdot 4m^2n$;

е) $-ab \cdot \left(-\frac{11x^2}{3a^2b^2}\right)$.

114 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{2a^2b}{3xy} \cdot \frac{3x^2y}{4ab^2} \cdot \frac{6ax}{15b^2}$;

б) $\frac{6m^3n^2}{35p^3} \cdot \frac{49n^4}{m^5p^3} \cdot \frac{5m^4p^2}{42n^6}$.

115 Дәрәҗәгә күтәрегез:

а) $\left(\frac{x}{2y}\right)^3$; б) $\left(\frac{3a}{c}\right)^4$; в) $\left(\frac{n^2}{10m}\right)^3$; г) $\left(\frac{9a^3}{2b^2}\right)^2$.

116 Дәрәҗәгә күтәрегез:

а) $\left(\frac{2a}{p^2q^3}\right)^4$; б) $\left(\frac{3a^2b^3}{s^4}\right)^2$; в) $\left(-\frac{2a^2b}{3mn^2}\right)^2$; г) $\left(-\frac{3x^2}{2y^3}\right)^3$.

117 Вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^2$; в) $\left(\frac{5a^3}{3b^2}\right)^4$; д) $\left(\frac{x^2y^4}{4m^3}\right)^5$; ж) $\left(-\frac{10m^2}{n^2p}\right)^3$;

б) $\left(\frac{2a^2}{b^3}\right)^3$; г) $\left(\frac{2x^2}{3y^3}\right)^5$; е) $\left(\frac{3a^2}{b^2c}\right)^4$; з) $\left(-\frac{b^3c^2}{8a^3}\right)^2$.

118 Тапкырлагыз:

а) $\frac{x^2-xy}{y} \cdot \frac{y^2}{x}$;

б) $\frac{3a}{b^2} \cdot \frac{ab+b^2}{9}$;

в) $\frac{m-n}{mn} \cdot \frac{2mn}{mn-m^2}$;

г) $\frac{4ab}{cx+dx} \cdot \frac{ax+bx}{2ab}$;

д) $\frac{ma-mb}{3n^2} \cdot \frac{2m}{nb-na}$;

е) $\frac{ax-ay}{5x^2y^2} \cdot \left(-\frac{5xy}{by-bx}\right)$.

119 Тапкырлагыз:

а) $(3a-15b) \cdot \frac{8}{a^2-25b^2}$;

б) $(x^2-4) \cdot \frac{2x}{(x+2)^2}$;

в) $\frac{y}{3y^2-12} \cdot (y^2-4y+4)$;

г) $\frac{2ab}{a^2-6ab+9b^2} \cdot (a^2-9b^2)$.

120 Вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{kx+k^2}{x^2}\cdot\frac{x}{x+k}$;

б) $\frac{ax+ay}{xy^2}\cdot\frac{x^2y}{3x+3y}$;

в) $\frac{xy}{a^2+a^3}\cdot\frac{a+a^2}{x^2y^2}$;

г) $\frac{6a}{x^2-x}\cdot\frac{2x-2}{3ax}$.

121 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{x^2-y^2}{2xy}\cdot\frac{2x}{x+y}$;

б) $\frac{4x^2}{x^2-9}\cdot\frac{3a-ax}{4x}$;

в) $\frac{y^2-16}{10xy}\cdot\frac{5y}{3y+12}$;

г) $\frac{b-a}{a}\cdot\frac{3ab}{a^2-b^2}$.

122 Вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{a^2-1}{a-b}\cdot\frac{7a-7b}{a^2+a}$;

б) $\frac{b^2+2bc}{b+3}\cdot\frac{5b+15}{b^2-4c^2}$;

в) $\frac{(x+3)^2}{2x-4}\cdot\frac{x^2-4}{3x+9}$;

г) $\frac{(y-5)^2}{2y+12}\cdot\frac{y^2-36}{2y-10}$.

123 а) $m=\frac{1}{4}$, $n=-3$ булганда, $\frac{5mn-m}{4m+n}\cdot\frac{16m^2-n^2}{5n-1}$;

б) $x=0{,}5$; $-1{,}5$ булганда, $\frac{(x+2)^2}{3x+9}\cdot\frac{2x+6}{x^2-4}$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

124 Тапкырлагыз:

а) $\frac{x^2-1}{5xy}\cdot\frac{x^2y}{1+x}$;

б) $\frac{8n^2}{m^2-16}\cdot\frac{m^2-4m}{6n}$;

в) $\frac{a^2-b^2}{a^2-3a}\cdot\frac{2a-6}{(a+b)^2}$;

г) $\frac{bx+3b}{x^2-25}\cdot\frac{(x-5)^2}{ax+3a}$.

125 Вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{mx^2-my^2}{2m+8}\cdot\frac{3m+12}{my+mx}$;

б) $\frac{ax+ay}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{x^2-xy}{7x+7y}$;

в) $\frac{x^3-y^3}{x+y}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}$;

г) $\frac{a^2-1}{a^3+1}\cdot\frac{a^2-a+1}{a^2+2a+1}$;

д) $\frac{b^3-8}{b^2-9}\cdot\frac{b+3}{b^2+2b+4}$;

е) $\frac{c^2+6c+9}{c^3+27}\cdot\frac{c^2-3c+9}{3c+9}$.

126 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{x^2-10x+25}{3x+12}\cdot\frac{x^2-16}{2x-10}$;

б) $\frac{1-a^2}{4a+8b}\cdot\frac{a^2+4ab+4b^2}{3-3a}$;

в) $\frac{y^2-25}{y^2+12y+36}\cdot\frac{3y+18}{2y+10}$;

г) $\frac{b^3+8}{18b^2+27b}\cdot\frac{2b+3}{b^2-2b+4}$.

Кабатлау өчен күнегүләр

127 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{2a+3c}{2a+c}-\frac{2b-3a}{3a+b}-\frac{2c(3a+b)}{6a^2+2ab+3ac+bc}$;

б) $\frac{a^2-4ac+3bc}{a^2-ab+bc-ac}+\frac{a+3b}{b-a}+\frac{a+2c}{a-c}$.

128 Велосипедчы беренче 30 км ны v км/сәг тизлек белән, ә калган 17 км ны 2 км/сәг кә артыграк тизлек белән үткән. Велосипедчы барлык юлны күпме вакытта үткән? Вакытны (сәгатьләрдә) t хәрефе белән билгеләгез һәм а) $v=15$; б) $v=18$ булганда, t ны табыгыз.

129 $y=1{,}2x+0{,}9$ һәм $y=-1{,}3\ x+4{,}4$ функцияләренең графикларын төзегез. Сызымнан графикларның кисешү нокталарының координаталарын табыгыз. Кисешү ноктасының абсциссасы һәм ординатасының якынча кыйммәтләренең абсолют хаталары нинди?

130 x ны a һәм b аша күрсәтегез:

а) $3x+b=a$; в) $\frac{x}{a}+1=b$;

б) $b-7x=a-b$; г) $b-\frac{x}{10}=a$.

6. Вакланмаларны бүлү

Гади вакланмаларны бүлгәндә, беренче вакланманы икенче вакланманың киресенә тапкырлыйлар. Мәсәлән,

$$\frac{3}{8}:\frac{2}{5}=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{16}.$$

Теләсә нинди вакланмаларны бүлгәндә дә шулай ук эшлиләр. Үзгәрешленең мөмкин саналган теләсә нинди кыйммәтләре өчен, ягъни $b\neq0$, $c\neq0$ һәм $d\neq0$ булганда да,

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

тигезлегенең дөрес икәнен исбатлыйк. Моның өчен $\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ һәм $\frac{c}{d}$ тапкырчыгышының $\frac{a}{b}$ га тигез икәнен исбатлыйк.

● Дөрестән дә,

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}\right)\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{d}{c}\cdot\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}\cdot1=\frac{a}{b}.$$

$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}\right)\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ булганга күрә, өлешнең билгеләмәсе буенча

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.\ ○$$

Табылган бердәйлектән вакланмаларны бүлү кагыйдәсе чыга:

бер вакланманы икенчесенә бүлү өчен, беренче вакланманы икенчесенә кире булган вакланмага тапкырларга кирәк.

Бу бердәйлектән һәм вакланмаларны тапкырлау кагыйдәсеннән файдаланып табабыз:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

1 нче мисал. $\frac{7a^2}{b^3}$ **вакланмасын** $\frac{14a}{b}$ **вакланмасына бүлик.**

▶ **Вакланмаларны бүлү кагыйдәсен кулланабыз:**

$$\frac{7a^2}{b^3} : \frac{14a}{b} = \frac{7a^2}{b^3} \cdot \frac{b}{14a} = \frac{a}{2b^2}. \quad ◁$$

2 нче мисал. $\frac{x-2}{x}$ **вакланмасын** $\frac{x+1}{x+2}$ **вакланмасына бүлик:**

▶ $$\frac{x-2}{x} : \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-2}{x} \cdot \frac{x+2}{x+1} = \frac{x^2-4}{x^2+x}. \quad ◁$$

3 нче мисал. $\frac{a^2-9}{3y}$ **вакланмасын** $a+3$ **күпбуынына бүлик.**

▶ **Вакланманы күпбуынга бүлгәндә, бу күпбуынны вакланма рәвешендә язалар да вакланмаларны бүлү кагыйдәсен кулланалар:**

$$\frac{a^2-9}{3y} : (a+3) = \frac{a^2-9}{3y} : \frac{a+3}{1} =$$

$$= \frac{a^2-9}{3y} \cdot \frac{1}{a+3} = \frac{a-3}{3y}. \quad ◁$$

Күнегүләр

131 Бүлегез:

а) $\frac{5m}{6n} : \frac{15m^2}{8}$; г) $\frac{3x}{9x^3} : \frac{1}{5a^2}$; ж) $\frac{18c^4}{7d} : (9c^2d)$;

б) $\frac{14}{9x^3} : \frac{7x}{2y^2}$; д) $\frac{11x}{4y^2} : (22x^2)$; з) $35x^5y : \frac{7x^3}{34}$.

в) $\frac{a^2}{12b} : \frac{ab}{36}$; е) $27a^3 : \frac{18a^4}{7b^2}$;

132 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{6x^2}{5y}:\frac{3x}{10y^3}$; в) $\frac{12p^2}{7d^4}:\frac{6p^3}{35d^2}$; д) $\frac{3ab}{4xy}\cdot\left(-\frac{21a^2b}{10x^2y}\right)$;

б) $\frac{8c}{21d^2}:\frac{6c^2}{7d}$; г) $-\frac{9y^2}{20x^3}:\frac{y^5}{16x}$; е) $-\frac{18a^2b^2}{5cd}:\left(-\frac{9ab^3}{5c^2d^4}\right)$.

133 Бүлегез:

а) $\frac{6x^2}{m^3n}:\frac{x}{3mn^2}$; г) $-\frac{6xy^2}{5ab}:\left(\frac{9x^2y^2}{10ab}\right)$;

б) $\frac{35x^2y}{12ab}:\frac{7xy}{8ab^2}$; д) $\frac{8mx^2}{3y^3}:(4m^2x)$;

в) $\frac{a^2b^3}{11mn^2}:\left(-\frac{4b^3}{33mn}\right)$; е) $15a^2bx:\frac{a^3b^2}{30x^2}$.

134 Вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{3x^2}{5y^3}:\frac{9x^3}{2y^2}\cdot\frac{5y}{3x}$; в) $\frac{2ab}{3c^2d}:\frac{2cd^2}{9ab}:\frac{a^2b}{c^3d}$;

б) $\frac{7p^4}{10q^3}\cdot\frac{5q}{14p^2}:\frac{3p}{4q^4}$; г) $\frac{8x^2y}{7ab^2}:\frac{4xy^2}{7a^2b}:\frac{2x^2y}{ab}$.

135 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{11m^4}{6n^2}\cdot\frac{5m}{6n^3}:\frac{11n^3}{12m^3}$; в) $\frac{4c^3d^2}{9a^3x^3}:\frac{2cd^2}{3a^2x}:\frac{2cd}{3a^2x^2}$;

б) $\frac{8x^3}{7y^3}:\frac{4x^4}{49y^2}:\frac{7x}{y^2}$; г) $\frac{2ax}{yz}:\frac{3bx}{ay}\cdot\frac{9b^2z}{8a^2xy}$.

136 Бүлегез:

а) $\frac{m^2-3m}{8x^2}:\frac{3m}{8x}$; д) $\frac{a^2-3ab}{3b}:(7a-21b)$;

б) $\frac{5a^2}{6b^3}:\frac{a^3}{ab-b^2}$; е) $(x^2-4y^2):\frac{5x-10y}{x}$;

в) $\frac{x^2+x^3}{11a^2}:\frac{4+4x}{a^3}$; ж) $(2a-b)^2:\frac{4a^3-ab^2}{3}$;

г) $\frac{6ax}{m^2-2m}:\frac{8ax}{3m-6}$; з) $(10m-15n):\frac{(2m-3n)^2}{2m}$.

137 Вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{x^2-4y^2}{xy}:\frac{x^2-2xy}{3y}$; г) $\frac{3m^2-3n^2}{m^2+mp}:\frac{6m-6n}{p+m}$;

б) $\frac{ab^2}{a^2-1}:\frac{5b}{a-a^2}$; д) $(x+3y):(x^2-9y^2)$;

в) $\frac{a^2-3a}{a^2-25}:\frac{a^2-9}{a^2+5a}$; е) $(a^2-6ab+9b^2):(a^2-9b^2)$.

138 Гамәлне башкарыгыз:

а) $\frac{x^2-xy}{9y^2}:\frac{2x}{3y}$; г) $(x^2-25y^2):(x^2+10xy+25y^2)$;

б) $\frac{2a^3-a^2b}{36b^2}:\frac{2a-b}{9b^3}$; д) $\frac{c^2+4c}{c^2-4}:\frac{3c+12}{c-2}$;

в) $(m^2-16n^2):\frac{(3m+12n)}{mn}$; е) $\frac{9p^2-1}{pq-2q}:\frac{1-3p}{3p-6}$.

139 а) $x=2{,}5$; -1 булганда, $\frac{4x^2-4x}{x+3}:(2x-2)$;

б) $a=26$, $b=-12$ булганда, $(3a+6b):\frac{2a^2-8b^2}{a+b}$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

140 Бүлегез:

а) $\frac{3x+6y}{x^2-y^2}:\frac{5x+10y}{x^2-2xy+y^2}$; в) $\frac{a^2+ax+x^2}{ax+2ay}:\frac{a^3-x^3}{bx+2by}$;

б) $\frac{a^2+4a+4}{16-b^4}:\frac{4-a^2}{4+b^2}$; г) $\frac{4m^2-25n^2}{m^3+8}:\frac{2m+5n}{m^2-2m+4}$.

141 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{m^2+6m+9}{2x^2y}:\frac{am+3a}{4xy}$; в) $\frac{a^2+ax+x^2}{x-1}:\frac{a^3-x^3}{x^2-1}$;

б) $\frac{ab^3}{7-7p}:\frac{a^2b^2}{1-2p+p^2}$; г) $\frac{ap^2-9a}{p^3-8}:\frac{p+3}{2p-4}$.

Кабатлау өчен күнегүләр

142 Гамәлләрне башкарыгыз:

а) $\frac{2b}{2b+3}+\frac{5}{3-2b}-\frac{4b^2+9}{4b^2-9}$;

б) $\frac{c+6b}{ac+2bc-6ab-3a^2}+\frac{2b}{a^2+2ab}-\frac{b}{ac-3a^2}$.

143 Пристаньнан агымга каршы үз тизлеге 10 км/сәг булган моторлы көймә кузгалып китә. Көймә чыгып 45 мин үткәннән соң, аның моторы ватыла һәм 3 сәг тән соң көймә елга агымы белән яңадан пристаньга кайта. Елганың агым тизлеге нинди?

144 $y=\frac{ab}{2c}$ формуласыннан

а) c үзгәрешлесен a, b һәм y аша;
б) a үзгәрешлесен b, c һәм y аша күрсәтегез.

145 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ формуласыннан

а) c үзгәрешлесен a һәм b үзгәрешлеләре аша;
б) b үзгәрешлесен a һәм c үзгәрешлеләре аша күрсәтегез.

146 Функциянең графигын төзегез:

а) $y=\frac{1}{4}x$; б) $y=-\frac{1}{8}x$.

$k>0$; $k<0$ булганда, $y=kx$ функциясенең графигы кайсы координаталар чирекләрендә урнаша?

7. Рациональ аңлатмаларның рәвешен үзгәртү

$\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{2y}{x-y}\right):(x^2-3y^2)$ рациональ аңлатмасы рациональ вакланмалар суммасын күпбуынга бүленгән өлешне күрсәтә. x^2-3y^2 ка бүлүне $\frac{1}{x^2-3y^2}$ ка тапкырлау белән алмаштырырга була. Шуңа күрә әлеге аңлатманың рәвешен үзгәртү $\frac{x-y}{x+y}$, $\frac{2y}{x-y}$ вакланмаларын кушуга һәм нәтиҗәне $\frac{1}{x^2-3y^2}$ вакланмасына тапкырлауга кайтып кала. Гомумән, теләсә нинди аңлатманың рәвешен үзгәртүне рациональ вакланмаларны кушуга, алуга, тапкырлауга яки бүлүгә кайтарып калдырырга була.

Вакланмалар белән гамәлләрнең кагыйдәләреннән рациональ вакланмаларның суммасын, аермасын, тапкырчыгышын һәм өлешен һәрвакытта да рациональ вакланма рәвешендә күрсәтеп булганлыгы чыга. Димәк, һәртөрле рациональ аңлатманы да рациональ вакланма рәвешендә күрсәтергә мөмкин.

1 нче мисал. $x+1-\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x}$ аңлатмасын рациональ вакланмага үзгәртик.

Башта вакланмаларны тапкырлыйк, аннары килеп чыккан нәтиҗәне $x+1$ күпбуыннан алабыз:

1) $\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)x}=\frac{x-2}{x}$;

2) $x+1-\frac{x-2}{x}=\frac{x(x+1)-(x-2)}{x}=\frac{x^2+x-x+2}{x}=$

$=\frac{x^2+2}{x}$.

2 нче мисал. $$\left(\frac{b}{a^2-ab}+\frac{a}{ab-b^2}\right)\cdot\frac{a^2b+ab^2}{a^2+b^2}+1$$

аңлатмасын рациональ вакланма рәвешендә күрсәтик.

▶ Башта җәя эчендәге вакланмаларны кушабыз, аннан соң табылган нәтиҗәне $\frac{a^2b+ab^2}{a^2+b^2}$ вакланмасына тапкырлыйбыз һәм, ниһаять, табылган тапкырчыгышка 1 не кушабыз:

1) $\frac{b}{a^2-ab}+\frac{a}{ab-b^2}=\frac{b}{a(a-b)}+\frac{a}{b(a-b)}=\frac{b^2+a^2}{ab(a-b)}$;

2) $\frac{b^2+a^2}{ab(a-b)}\cdot\frac{a^2b+ab^2}{a^2+b^2}=\frac{(a^2+b^2)\,ab(a+b)}{ab(a-b)\,(a^2+b^2)}=\frac{a+b}{a-b}$;

3) $\frac{a+b}{a-b}+1=\frac{a+b+a-b}{a-b}=\frac{2a}{a-b}$.

Башкача да язарга мөмкин:

$$\left(\frac{b}{a^2-ab}+\frac{a}{ab-b^2}\right)\cdot\frac{a^2b+ab^2}{a^2+b^2}+1=$$

$$=\left(\frac{b}{a(a-b)}+\frac{a}{b(a-b)}\right)\cdot\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}+1=$$

$$=\frac{(b^2+a^2)ab(a+b)}{ab(a-b)(a^2+b^2)}+1=\frac{a+b}{a-b}+1=\frac{a+b+a-b}{a-b}=\frac{2a}{a-b}.\ \triangleleft$$

3 нче мисал. $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}$ аңлатмасын рациональ вакланма рәвешендә күрсәтик.

▶ Рәвешүзгәртүне төрлечә башкарырга мөмкин. Санаучыны һәм ваклаучыны аерым-аерым рациональ вакланмалар рәвешендә күрсәтергә, ә аннары беренче нәтиҗәне икенчесенә бүләргә мөмкин. Шулай ук вакланманың төп үзлегеннән файдаланып, санаучыны да, ваклаучыны да xy ка тапкырларга мөмкин. Бу очракта рәвешүзгәртү гадирәк булыр:

$$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}=\frac{\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)xy}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)xy}=\frac{\frac{x}{y}\cdot xy-\frac{y}{x}\cdot xy}{\frac{x}{y}\cdot xy+\frac{y}{x}\cdot xy-2xy}=$$

$$=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-2xy}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{x+y}{x-y}.\ \triangleleft$$

Күнегүләр

147 Гамәлләрне эшләгез:

а) $\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right):\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$;

б) $\left(\frac{a}{m^2}+\frac{a^2}{m^3}\right):\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{m}{a}\right)$;

в) $\frac{ab+b^2}{3}:\frac{b^3}{3a}+\frac{a+b}{b}$;

г) $\frac{x-y}{x}-\frac{5y}{x^2}\cdot\frac{x^2-xy}{5y}$.

148 Гамәлләрне башкарыгыз:

а) $\left(\frac{x}{x+1}+1\right)\cdot\frac{1+x}{2x-1}$;

б) $\frac{5y^2}{1-y^2}:\left(1-\frac{1}{1-y}\right)$;

в) $\left(\frac{4a}{2-a}-a\right):\frac{a+2}{a-2}$;

г) $\frac{x-2}{x-3}\cdot\left(x+\frac{x}{2-x}\right)$.

149 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\left(\frac{2m+1}{2m-1}-\frac{2m-1}{2m+1}\right):\frac{4m}{10m-5}$;

б) $\frac{x+3}{x^2+3}\cdot\left(\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}\right)$.

150 Гамәлләрне башкарыгыз:

а) $\frac{a^2-9}{2a^2+1}\cdot\left(\frac{6a+1}{a-3}+\frac{6a-1}{a+3}\right)$;

б) $\left(\frac{5x+y}{x-5y}+\frac{5x-y}{x+5y}\right):\frac{x^2+y^2}{x^2-25y^2}$.

151 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\left(\frac{a}{b^2-ab}+\frac{b}{a^2-ab}\right)\cdot\frac{ab}{b-a}$;

б) $\left(\frac{x}{xy-y^2}-\frac{y}{x^2-xy}\right):\frac{x^2-y^2}{8xy}$;

в) $\left(\frac{4p-8}{p^3-2p^2}-\frac{q+2}{q^3+2q^2}\right)\cdot\frac{p}{2q-p}$;

г) $\left(\frac{a-7b}{ab-b^2}+\frac{7a+b}{a^2-ab}\right):\frac{a^2+b^2}{a-b}$.

152 Гамәлләрне башкарыгыз:

а) $\frac{a^2-25}{a+3}\cdot\frac{1}{a^2-5a}-\frac{a+5}{a^2-3a}$;

б) $\frac{1-2x}{2x+1}+\frac{x^2+3x}{4x^2-1}:\frac{3+x}{4x+2}$;

в) $\frac{b-c}{a+b}-\frac{ab-b^2}{a^2-ac}\cdot\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}$;

г) $\frac{a^2-4}{x^2-9}:\frac{a^2-2a}{xy+3y}+\frac{2-y}{x^2-3}$.

153 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\left(2x+1-\frac{1}{1-2x}\right):\left(2x-\frac{4x^2}{2x-1}\right)$;

б) $\left(\frac{pq}{p^2-q^2}+\frac{q}{q-p}\right):\left(p-q+\frac{4q^2-p^2}{p+q}\right)$;

в) $(a^2+2a+1)\cdot\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a^2-1}-\frac{1}{a-1}\right)$;

г) $\left(1-\frac{9x^2+4}{12x}\right):\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{2}\right)+1$;

д) $1-\left(\frac{2}{a-2}-\frac{2}{a+2}\right)\cdot\left(a-\frac{3a+2}{4}\right)$;

е) $(y^2-4)\left(\frac{3}{y+2}-\frac{2}{y-2}\right)+5$.

154 Гамәлләрне башкарыгыз:

а) $\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{x-y}\right)\left(x-\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$;

б) $\left(a+b-\frac{2ab}{a+b}\right):\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{b}{a}\right)$;

в) $(x^2-1)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+1\right)$;

г) $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right):\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)$.

155 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$;

б) $\left(\frac{x-2y}{x^2+2xy}-\frac{1}{x^2-4y^2}:\frac{x+2y}{(2y-x)^2}\right)\cdot\frac{(x+2y)^2}{4y^2}$;

в) $\left(\frac{a^2}{a+n}-\frac{a^3}{a^2+n^2+2an}\right):\left(\frac{a}{a+n}-\frac{a^2}{a^2-n^2}\right)$;

г) $\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)$.

156 Вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{x+2}{x^2-2x+1}\cdot\frac{3x-3}{x^2-4}-\frac{3}{x-2}$;

б) $\frac{a-2}{4a^2+16a+16}:\left(\frac{a}{2a-4}-\frac{a^2+4}{2a^2-8}-\frac{2}{a^2+2a}\right)$;

в) $\left(\frac{y^2-3y}{y^2-6y+9}-\frac{3y+9}{y^2-9}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{y}\right)$.

157 Гамәлләрне башкарыгыз:

а) $\left(\frac{a-1}{3a+(a-1)^2}-\frac{1-3a+a^2}{a^3-1}-\frac{1-3a+a^2}{a^3-1}-\frac{1}{a-1}\right):\frac{a^2+1}{1-a}$;

б) $\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}+\frac{3}{x^2-x+1}\right)\left(x-\frac{2x-1}{x+1}\right)$.

158 **Бердәйлекне исбатлагыз:**

а) $\frac{2p-q}{pq}-\frac{1}{p+q}\cdot\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)=\frac{1}{q}$;

б) $\left(a-\frac{4ab}{a+b}+b\right):(a-b)=\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}$;

в) $\frac{1{,}2x^2-xy}{0{,}36x^2-0{,}25y^2}=\frac{20x}{6x+5y}$.

159 **Бердәйлекне исбатлагыз:**

а) $\frac{a+b}{2(a-b)}-\frac{a-b}{2(a+b)}=\frac{b}{a-b}-\frac{b^2-ab}{a^2-b^2}$;

б) $\frac{4{,}5a+4x}{0{,}81a^2-0{,}64x^2}=\frac{50}{9a-8x}$.

160 **Үзгәрешлеләрнең мөмкин саналган барлык кыйммәтләре өчен аңлатманың кыйммәте үзгәрешлеләрнең шул аңлатмадагы кыйммәтләренә бәйле булмавын исбатлагыз:**

а) $\left(\frac{2ab}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{2a+2b}\right)\cdot\frac{2a}{a+b}+\frac{b}{b-a}$;

б) $\frac{y}{x-y}-\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{x}{(x-y)^2}-\frac{y}{x^2-y^2}\right)$.

161 **Үзгәрешлеләрнең мөмкин саналган барлык кыйммәтләре өчен аңлатманың кыйммәте a һәм c га бәйле булмавын исбатлагыз:**

а) $\left(\frac{1}{a-c}-\frac{3c^2}{a^3-c^3}-\frac{c}{a^2+ac+c^2}\right)\cdot\left(c+\frac{a^2}{a+c}\right)$;

б) $3a\left(\frac{1}{a-c}-\frac{c}{a^3-c^3}\cdot\frac{a^2+ac+c^2}{a+c}\right)-\frac{3c^2}{a^2-c^2}$.

162 **Күпбуын яки рациональ вакланма рәвешендә күрсәтегез:**

а) $\left(n+\frac{1}{n}\right)^2$;

б) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2$;

в) $\left(\frac{x}{y}+1\right)^2+\left(\frac{x}{y}-1\right)^2$;

г) $\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)^2-\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)^2$;

д) $\left(\frac{x+y}{x}+\frac{x-y}{y}\right)^2-\left(\frac{x+y}{x}-\frac{x-y}{y}\right)^2$;

е) $a^2\left(\frac{a+b}{a}-1\right)^2+b^2\left(\frac{a-b}{b}+1\right)^2$.

163 **Аңлатманы гадиләштерегез:**

а) $\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$; б) $\frac{\frac{2a-b}{b}+1}{\frac{2a+b}{b}-1}$; в) $\frac{\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}}{\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}}$; г) $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}$.

164 Түбәндәге вакланмаларны күпбуыннарның чагыштырмасы рәвешендә күрсәтегез:

а) $\dfrac{2-\frac{a}{x}}{2+\frac{a}{x}}$; б) $\dfrac{\frac{a-b}{c}+3}{\frac{a+b}{c}-1}$; в) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$; г) $\dfrac{x-y}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$.

165 x урынына бирелгән вакланманы куегыз һәм килеп чыккан аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\dfrac{x-a}{x-b}$, биредә $x=\dfrac{ab}{a+b}$;

б) $\dfrac{\frac{a}{b}-x}{\frac{b}{a}+x}$, биредә $x=\dfrac{a-b}{a+b}$.

166 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{1}{2}$ булганда, $\dfrac{\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{9}}{\frac{a}{12}+\frac{b}{18}}$ нең;

б) $a=-8$, $b=0{,}6$ булганда, $\dfrac{0{,}2a-b}{\frac{a^2}{25}-b^2}$ ның.

Кабатлау өчен күнегүләр

167 а) $y=\frac{1}{2}x-2$; б) $y=-0{,}4x+2$ функциясе графигының x лар күчәре һәм y лар күчәре белән кисешү нокталарының координаталарын табыгыз. Һәр функциянең графигын төзегез.

168 а) (0; 4) ноктасы аша үтүче һәм $y=3x$ турысына параллель булган; б) координаталар башлангычы аша үтүче һәм $y=-\frac{1}{2}x-8$ турысына параллель булган турының тигезләмәсен языгыз.

169 а) $k>0$; $b>0$; в) $k<0$; $b<0$;
б) $k<0$, $b>0$; г) $k=0$, $b>0$
булганда, $y=kx+b$ рәвешендәге формула белән бирелгән функциянең графигын схематик рәвештә сурәтләгез.

170 Турыпочмаклыкның бер ягы икенчесеннән 20 см га озынрак. Әгәр кечерәк ягын ике тапкыр, зуррак ягын өч тапкыр арттырсак, яңа турыпочмаклыкның периметры 240 см га тигез булыр. Бирелгән турыпочмаклыкның якларын табыгыз.

171 Аралары 710 км булган ике станциядән кара-каршы тиз йөрешле һәм пассажир поездлары юлга чыга. Тиз йөрешле поезд пассажир поездыннан бер сәгатькә алданрак кузгала һәм 110 км/сәг тизлек белән бара. Әгәр пассажир поездының тизлеге 90 км/сәг булса, тиз йөрешле поезд пассажир поезды белән ничә сәгатьтән соң очрашырлар?

8. $y = \frac{k}{x}$ функциясе һәм аның графигы

Буе x см, ә иңе y см булган турыпочмаклыкның мәйданы 24 $см^2$ га тигез булсын. Ул вакытта y ның x ка бәйлелеге $y = \frac{24}{x}$ формуласы белән билгеләнә, x ның кыйммәтен берничә тапкыр арттырганда, y ның тиңдәшле кыйммәте шулкадәр тапкыр кими, ягъни y үзгәрешлесе x үзгәрешлесенә кире пропорциональ була. Бу мәсьәләдә x һәм y үзгәрешлеләре бары тик уңай кыйммәтләр генә алды. Киләчәктә без $y = \frac{k}{x}$ рәвешендәге формула белән бирелә торган, x һәм y үзгәрешлеләре уңай кыйммәтләр дә, шулай ук тискәре кыйммәтләр дә ала торган функцияләрне тикшерербез. Мондый функцияләрне кире пропорциональлек дип атыйлар.

Билгеләмә. $y = \frac{k}{x}$ **рәвешендәге формула белән бирергә мөмкин булган функция кире пропорциональлек дип атала, биредә x — бәйсез үзгәрешле, k — нульгә тигез булмаган сан.**

Нульдән үзгә барлык саннар күплеге $y = \frac{k}{x}$ функциясенең билгеләнү өлкәсе булып тора. Бу исә x ның $x \neq 0$ булган барлык кыйммәтләре өчен $\frac{k}{x}$ аңлатмасының мәгънәсе булганлыктан килеп чыга.

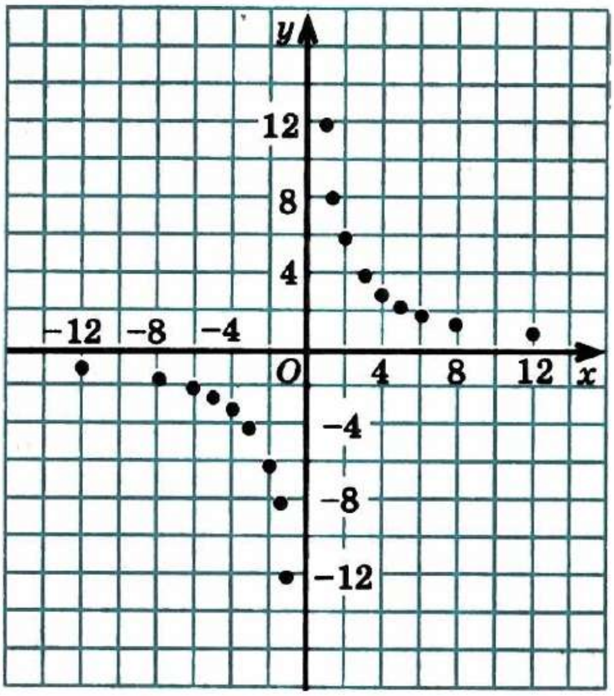
$y = \frac{12}{x}$ функциясенең графигын төзик. Моның өчен x ның кайбер уңай кыйммәтләренә һәм аларга капма-каршы булган тискәре кыйммәтләренә тиңдәш y кыйммәтләрен табыйк:

x	1	1,5	2	3	4	5	6	8	12
y	12	8	6	4	3	2,4	2	1,5	1

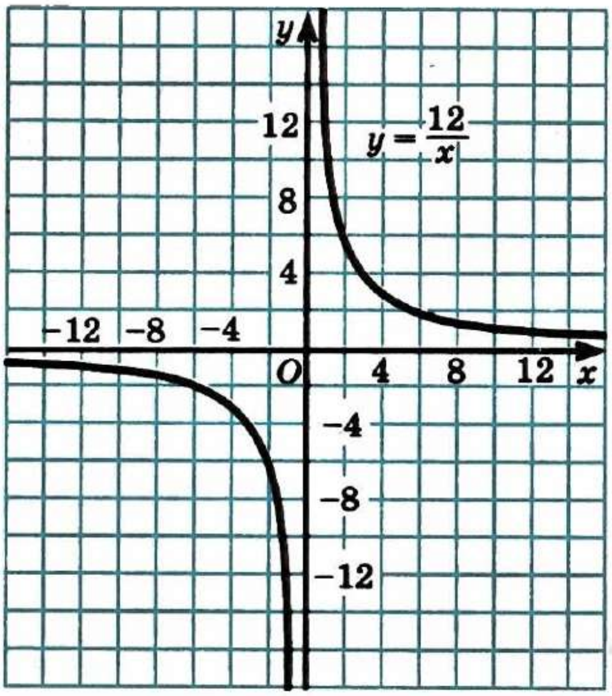
x	−1	−1,5	−2	−3	−4	−5	−6	−8	−12
y	−12	−8	−6	−4	−3	−2,4	−2	−1,5	−1

Координаталары таблицада бирелгән нокталарны координаталар яссылыгында билгелибез (рәс.1).

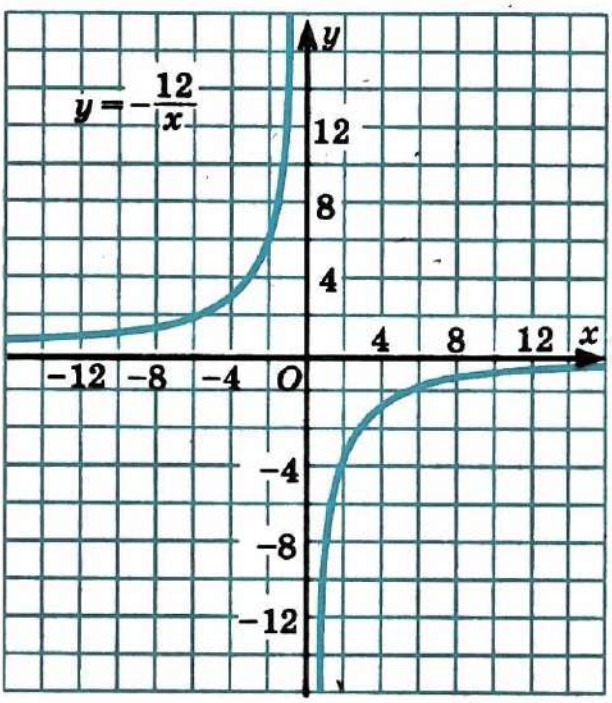
$y=\frac{12}{x}$ функциясе графигының кайбер үзенчәлекләрен ачыклыйк. 0 саны функциянең билгеләнү өлкәсенә кермәгәнгә күрә, графикта абсциссасы 0 булган нокта юк, ягъни график y күчәрен кисеп үтми. x ка нинди генә кыйммәтләр бирсәк тә, y ның кыйммәте нульгә тигез түгел, шуңа күрә график x лар күчәрен кисми. x ның уңай кыйммәтләренә y ның уңай кыйммәтләре тиңдәш. x ның уңай кыйммәте никадәр зуррак булса,



Рәс. 1



Рәс. 2



Рәс. 3

y ның аңа тиңдәш кыйммәте шулкадәр кечкенәрәк була. Мәсәлән, әгәр $x=10$ булса, $y=1{,}2$; әгәр $x=100$ булса, $y=0{,}12$; әгәр $x=1000$ булса, $y=0{,}012$ була. Димәк, графиктагы ноктаның уңай абсциссасы никадәр зур булса, бу нокта абсциссалар күчәренә шулкадәр якынрак ята. x ның җитәрлек кадәр зур кыйммәтләре өчен әлеге ара теләгән кадәр кечкенә була ала. Графиктагы ноктаның уңай абсциссасы нульгә никадәр якын булса, бу ноктаның ординатасы шулкадәр зуррак була. Мәсәлән, әгәр

$x = 0,03$ икән, $y = 400$, әгәр $x = 0,0001$ икән, $y = 120\ 000$ була.

$y = \frac{12}{x}$ функциясенең графигы 2 нче рәсемдә күрсәтелгән. Ул ике тармактан тора. Аның берсе координаталарның беренче чирегендә, ә икенчесе өченче чирегендә урнашкан. Теләсә нинди $k > 0$ булганда, $y = \frac{k}{x}$ функциясенең графигы шундый рәвештә була.

3 нче рәсемдә $y = -\frac{12}{x}$ функциясенең графигы төзелгән. Ул шулай ук, $y = \frac{12}{x}$ функциясенең графигы кебек үк, ике тармактан торган кәкредән гыйбарәт. Ләкин $y = \frac{12}{x}$ функциясенең графигыннан аермалы буларак, ул кәкренең берсе координаталарның икенче чирегендә, ә икенчесе координаталарның дүртенче чирегендә ята.

Теләсә нинди $k < 0$ булганда, $y = \frac{k}{x}$ функциясенең графигы $y = -\frac{12}{x}$ функциясе графигы рәвешендә була.

Кире пропорциональлекнең графигы булган кәкрене *гипербола* дип атыйлар. Гипербола ике тармактан тора.

Күнегүләр

172 Функция $y = \frac{8}{x}$ формуласы белән бирелгән. Таблицаны тутырыгыз:

x	−4		−0,25	2	5	16	
y		−4					0,4

173 Кире пропорциональлек $y = \frac{120}{x}$ формуласы белән бирелгән. Таблицаны тутырыгыз:

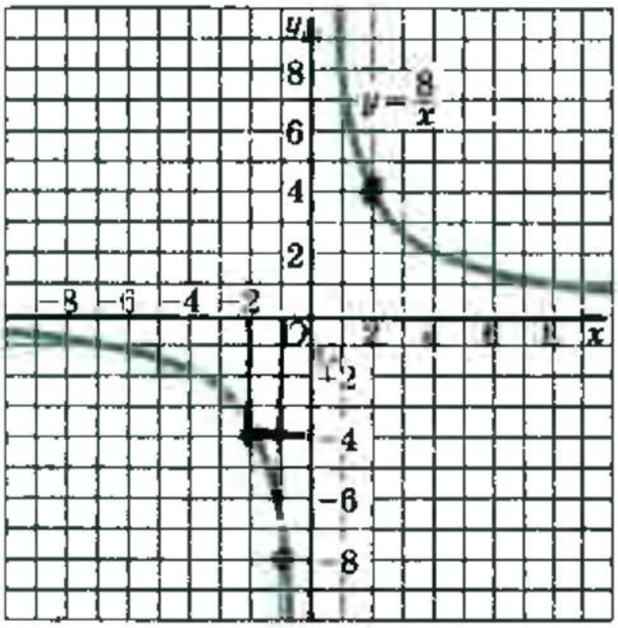
x	−1200	−600			75	120		1000
y			−0,5	−1			0,4	

174 Поезд, v км/сәг тизлек белән хәрәкәт итеп, A һәм B шәһәрләре арасындагы 600 км га тигез ераклыкны t сәг тә үтә. а) v ның t га; б) t ның v га бәйлелеген аңлатучы формуланы языгыз.

175 Кире пропорциональлек $y = \frac{10}{x}$ формуласы белән бирелгән. Функциянең аргументы 100 гә; 1000 гә; 0,1 гә; 0,02 гә тигез кыйммәтенә тиңдәш кыйммәтен табыгыз. Әлеге функциянең графигында A (−0,05; −200); B (−0,1; 100); C (400; 0,025); D (500; − 0,02) нокталары ятамы?

176 Ниндидер функциянең кире пропорциональлек икәне билгеле. Аргументның 2 гә тигез кыйммәтенә функциянең 12 гә тигез кыйммәте тиңдәш икәне билгеле булса, әлеге функцияне формула рәвешендә языгыз.

177 4 нче рәсемдә $y = \frac{8}{x}$ формуласы белән бирелгән функциянең графигы төзелгән. График буенча



Рәс. 4

а) x ның 2; 4; −1; −4; −5 кыйммәтенә тиңдәш y кыйммәтен табарга;

б) y ның −4; −2; 8 кыйммәтенә тиңдәш булган x кыйммәтен табарга.

178 $y = \frac{-8}{x}$ формуласы белән бирелгән функциянең графигын төзегез. График буенча табыгыз:

а) x ның 4 кә; 2,5 кә; 1,5 кә; −1 гә; −2,5 кә тигез кыйммәтенә тиңдәш булган y ның кыйммәтен;

б) y ның 8 гә; −2 гә тигез кыйммәтенә тиңдәш булган x ның кыйммәтен.

179 $y = \frac{6}{x}$ формуласы белән бирелгән функциянең графигын төзегез һәм график ярдәмендә

а) $x = 1{,}5$; $-2{,}5$; $3{,}5$ булганда, функциянең кыйммәтен табыгыз;

б) аргументның y ны −3 кә; −1,5 кә; 4 кә; 7 гә тигез итә торган кыйммәтен табыгыз.

180 а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = -\frac{1}{x}$; в) $y = \frac{24}{x}$; г) $y = -\frac{24}{x}$.

формуласы белән бирелгән функциянең графигын төзегез.

181 Нигезенең яклары a см һәм b см, биеклеге 20 см булган турыпочмаклы параллелепипедның күләме 120 $см^3$ га тигез. b ның a га бәйлелеге формула аша аңлатыгыз. Ни өчен бу бәйлелек кире пропорциональлек була? Бу функциянең билгеләнү өлкәсе нинди? График төзегез.

182 Кире пропорциональлекнең графигы

а) $A\ (8;\ 0{,}125)$; б) $B\left(\frac{2}{3};1\frac{4}{5}\right)$; в) $C\ (-25;\ -0{,}2)$

нокталары аша үткәнен белеп, кире пропорциональлекне формула белән бирегез.

183 5 нче рәсемдә A пунктыннан B пунктына бару өчен үткән вакытның хәрәкәт итү тизлегенә бәйлелек графигы төзелгән. Графиктан файдаланып, түбәндәге сорауларга җавап бирегез:

а) Хәрәкәт тизлеге 800 км/сәг; 250 км/сәг; 120 км/сәг булганда, A дан B га бару өчен, күпме вакыт кирәк булыр?

б) A пунктыннан B пунктына 1 сәг тә; 4 сәг тә; 8 сәг тә; 16 сәг тә барып җитү өчен, нинди тизлек белән хәрәкәт итәргә кирәк?

в) A һәм B пунктлары арасындагы ераклык нинди?

184 $y=\frac{k}{x}$ функциясе графигының

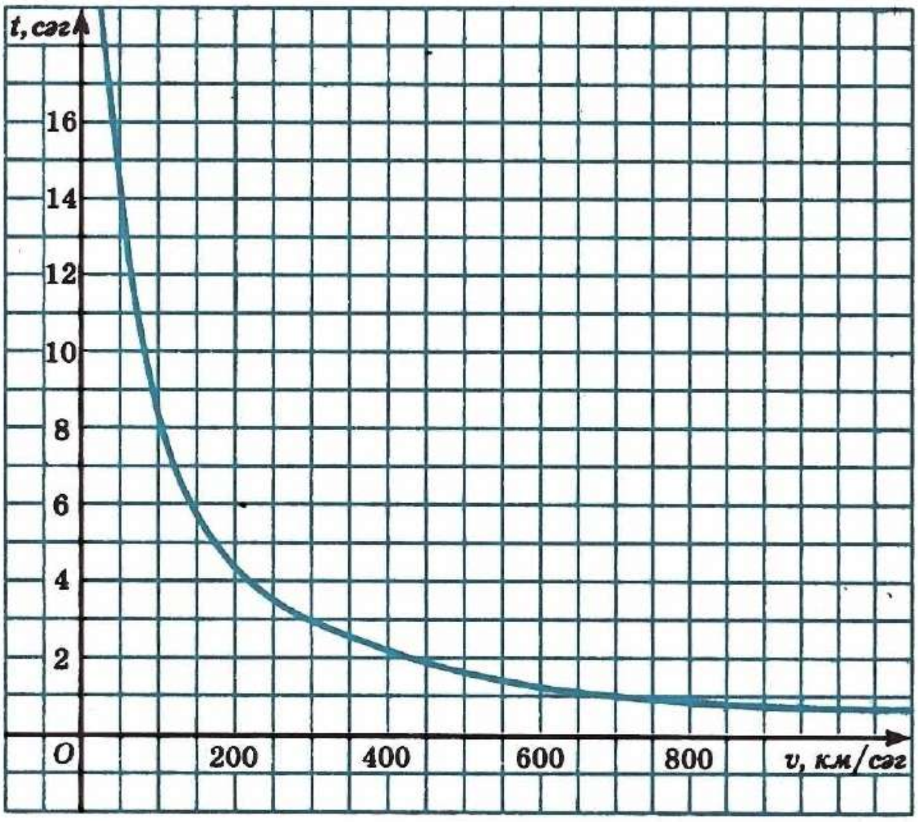
а) беренче һәм өченче координаталар чирегендә;

б) икенче һәм дүртенче координаталар чирегендә урнашуын белеп, k санының тамгасын билгеләгез.

Кабатлау өчен күнегүләр

185 Үзгәрешлеләрнең мөмкин табылган барлык кыйммәтләренә ия булганда да вакланманың кыйммәте ул үзгәрешлеләрнең кыйммәтенә бәйле булмавын исбатлагыз:

а) $\frac{5(x-y)^2}{(3y-3x)^2}$; б) $\frac{(3x-6y)^2}{4(2y-x)^2}$.



Рәс. 5

186 Аңлатманы гадиләштерегез:

$$\left(\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x-2}-\frac{12}{4-x^2}\right):\frac{x+7}{x-2}.$$

187 $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$ формуласыннан

а) x ны y һәм z аша; б) z ны x һәм y аша белдерегез.

Контроль сораулар

1 Вакланмаларны тапкырлау кагыйдәсен әйтеп бирегез.
2 Вакланманы дәрәҗәгә күтәрү кагыйдәсен әйтеп бирегез.
3 Вакланмаларны бүлү кагыйдәсен әйтеп бирегез.
4 Нинди функция кире пропорциональлек дип атала?
5 $k>0$; $k<0$ булганда, $y=\frac{k}{x}$ функциясенең графигы кайсы координаталар чирекләрендә урнаша?

I бүлеккә өстәмә күнегүләр

1 нче параграфка

188 Аңлатманы күпбуынга үзгәртегез:

а) $5x^2(x^2-2x+3)$;
б) $-8y^2(y^2-5y-1)$;
в) $(a^2-5a+4)(2a+3)$;
г) $(3b-2)(b^2-7b-5)$;
д) $3x^2(-5x^2+4x-1)+16x^4$;
е) $8y^6-2y^3(1-5y-y^2+4y^3)$;
ж) $(a^2+7a+3)(a^2-4a+2)$;
з) $(b^2-3b-5)(b^2+3b-5)$.

189 Аңлатманы күпбуын рәвешендә күрсәтегез:

а) $(-4x+7a)(7a+4x)$;
б) $(3c^2-8)(3c^2+8)$;
в) $(2x-5y)^2$;
г) $(p^2+2)^2$;
д) $(3a^2-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$;
е) $(x^2+5y)(x^4-5x^2y+25y^2)$;
ж) $(m-n)^3-(m-n)(m^2+mn+n^2)$;
з) $(x+y)^3-(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

190 Тапкырлаучыларга таркатыгыз:

а) a^2b+ab^2;
б) x^3y-xy^3;
в) $7x^2-14xy+21ax$;
г) $9xy-3by+15ay$;
д) $x^4-x^3+x^2-x$;
е) $c^4-2c^3-c^2+2c$;
ж) $(a-2)^2-25a^2$;
з) $(b+3)^2-36b^2$;
и) $125x^3+8$;
к) $216x^3-27$;
л) $(a+1)^3+a^3$;
м) $(b+2)^3-8b^3$.

191 Бердәйлекне исбатлагыз:

а) $a^4+a^2+1=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$;
б) $b^8+b^4+1=(b^4+b^2+1)(b^4-b^2+1)$;
в) $c^4+4=(c^2-2c+2)(c^2+2c+2)$.

192 Вакланманың кыйммәтен табыгыз: а) $\frac{51+17^2}{10}$; б) $\frac{37^2+111}{40}$.

193 A һәм B шәһәрләре арасы 600 км. Беренче поезд A дан B га китә һәм 60 км/сәг тизлек белән бара. Икенче поезд B дан A га беренче поездга караганда 3 сәг кә соңрак кузгала һәм v км/сәг тизлек белән бара. Беренче поезд чыгып t сәг үткәч, әлеге поездлар очрашалар. v ны t аша күрсәтегез. $t=7$; $t=6$ булганда, v тизлеген табыгыз.

194 Аңлатмада үзгәрешленең мөмкин саналган кыйммәтләрен табыгыз:

а) $\frac{3x-8}{25}$; в) $\frac{9}{x^2-7x}$; д) $\frac{12}{|x|-3}$;

б) $\frac{37}{2y+7}$; г) $\frac{2y+5}{y^2+8}$; е) $\frac{45}{|y|+2}$.

195 а) $x=2$; в) $x=-3$ һәм $x=3$;

б) $x=0$ һәм $x=3$; г) $x=-\frac{1}{2}$ һәм $x=\frac{1}{2}$

дән тыш, үзгәрешленең барлык кыйммәтләре өчен мәгънәсе булган x үзгәрешлеле вакланма төзегез.

196 Ваклаучысында x үзгәрешлесе һәм x ның барлык кыйммәтләре өчен дә мәгънәсе булган вакланма төзегез.

197 Функциянең билгеләнү өлкәсен күрсәтегез:

а) $y=\frac{1}{x-2}$; б) $y=\frac{3x}{x+5}$; в) $y=\frac{7x+1}{2x-6}$.

198 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $-\frac{99x}{22y}$; в) $\frac{405ac}{45ay}$; д) $\frac{35a^5y^4}{28a^4y^8}$;

б) $\frac{216bc}{180ac}$; г) $\frac{18abc}{180ac}$; е) $\frac{7x^4y^4}{14x^4y^{14}}$.

199 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{17xy+34}{17(xy+34)}$; г) $\frac{(a^2-9)^2}{(3-a)^3}$; ж) $\frac{2x-y}{x^2-0,5xy}$;

б) $\frac{(3a-3c)^2}{9a^2-9c^2}$; д) $\frac{x^2-100}{x^3+1000}$; з) $\frac{5a^2-3ab}{a^2-0,36b^2}$.

в) $\frac{2b^2-2a^2}{(2a-2b)^2}$; е) $\frac{8y^3-1}{y-4y^3}$;

200 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{10ab-15b^2}{4a^2-6ab}$; г) $\frac{6p^2-8pq}{9p^2-24pq+16q^2}$; ж) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{a^3+8b^3}$;

б) $\frac{21xy-7y^2}{6x^2-2xy}$; д) $\frac{a^2-4a+4}{a^2+ab-2a-2b}$; з) $\frac{27x^3-y^3}{18x^2+6xy+2y^2}$.

в) $\frac{2x^2+10xy}{x^2-25y^2}$; е) $\frac{6x^2-3xy+4x-2y}{9x^2+12x+4}$;

201 Кыскартыгыз:

а) $\frac{b^{14}-b^7+1}{b^{21}+1}$; в) $\frac{x(y-z)-y(x-z)}{x(y-z)^2-y(x-z)^2}$;

б) $\frac{x^{33}-1}{x^{33}+x^{22}+x^{11}}$; г) $\frac{a(b+1)^2-b(a+1)^2}{a(b+1)-b(a+1)}$.

202 Әгәр $\frac{x^2-2y^2}{3y^2+5xy}$ вакланмасында x һәм y үзгәрешлеләрен тиңдәшле рәвештә, $k \neq 0$ булганда, kx һәм ky ка алыштырсак, баштагы вакланмага бердәй тигез вакланма килеп чыгуын исбатлагыз.

203 $\frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2}$ вакланмасының $x=\frac{2}{7}$ һәм $y=\frac{3}{7}$ булгандагы кыйммәте әлеге вакланманың $x=2$ һәм $y=3$ булгандагы кыйммәтенә тигез икәнен исбатлагыз.

204 $a-b=9$ икәне билгеле. Вакланманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\frac{36}{(a-b)^2}$; б) $\frac{108}{(b-a)^2}$; в) $\frac{(5a-5b)^2}{45}$; г) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3}$.

2 нче параграфка

205 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{x^2-2x}{x-3}-\frac{4x-9}{x-3}$; в) $\frac{a^2}{a^2-b^2}+\frac{b^2}{b^2-a^2}$;

б) $\frac{y^2-10}{y-8}-\frac{54}{y-8}$; г) $\frac{x^2-2x}{x^2-y^2}-\frac{2y-y^2}{y^2-x^2}$.

206 Түбәндәге аңлатмаларның күпбуыннарга бердәй тигез икәнен исбат итегез:

а) $\frac{(y-b)^2}{y-b+1}+\frac{y-b}{y-b+1}$; в) $\frac{x^2-y^2}{x-y-1}+\frac{x+y}{y-x+1}$;

б) $\frac{(a+x)^2}{a+x-2}-\frac{2a+2x}{a+x-2}$; г) $\frac{b^2-9c^2}{b+3c-2}+\frac{2(b-3c)}{2-b-3c}$.

207 а) $a=-0{,}8$, $b=-1{,}75$ булганда, $\frac{a^2-12b}{a^2-3ab}-\frac{3ab-4a}{a^2-3ab}$;

б) $x=20$, $y=22{,}5$ булганда, $\frac{x^2-2y}{x^2+xy+2x}-\frac{4-xy}{x^2+xy+2x}$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз. Мәсьәләдә артык бирелмәләр юкмы?

208 Бөтен аңлатма белән вакланманың суммасы яки аермасы рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{x+2}{x}$; б) $\frac{y+z^2}{z}$; в) $\frac{a^2-2a+4}{a}$; г) $\frac{b^2+3b-6}{b}$.

209 n нинди натураль кыйммәтләргә ия булганда, аңлатманың кыйммәте натураль сан булыр:

а) $\frac{n+6}{n}$; б) $\frac{5n-12}{n}$; в) $\frac{36-n^2}{n^2}$?

210 $\frac{x}{y}=5$ икәне билгеле. Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\frac{x+y}{y}$; б) $\frac{x-y}{y}$; в) $\frac{y}{x}$; г) $\frac{x+2y}{x}$.

211 $\frac{x+y}{y}=3$ икәне билгеле. Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\frac{x}{y}$; б) $\frac{y}{x+y}$; в) $\frac{x-y}{y}$; г) $\frac{y}{x}$.

212 Вакланмаларны кушыгыз яки алыгыз:

а) $\frac{3b^2-5b-1}{b^2y}+\frac{5b-3}{by}$; в) $\frac{1+c}{c^3y^4}-\frac{c^3+y^4}{c^2y^8}$;

б) $\frac{a^2-a+1}{a^3x}-\frac{x^2-1}{ax^3}$; г) $\frac{c^2+x^2}{c^2x^5}-\frac{c+x}{c^3x^3}$.

213 Вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $x+y+\frac{x-y}{4}$; в) $a-\frac{ab+ac+bc}{a+b+c}$;

б) $m+n-\frac{1+mn}{n}$; г) $a^2-b^2-\frac{a^3-b^3}{a+b}$.

214 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{mn+1}{m+n}+\frac{mn-1}{m-n}$; г) $\frac{9a-24b}{a(a-b)}+\frac{21b-6a}{a(a-b)}$;

б) $\frac{a+b}{2a}-\frac{b}{a+b}$; д) $\frac{3x+21y}{x^2-49y^2}+\frac{2xy}{x^2-7xy}$;

в) $\frac{x+4a}{3a+3x}-\frac{a-4x}{3a-3x}$; е) $\frac{m^2-2mn}{m^2-4n^2}+\frac{2n^2}{mn+2n^2}$.

215 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{2b^2-bc}{b^2-0{,}25c^2}-\frac{2c}{2b+c}$; г) $\frac{a^2+0{,}3ab}{ab+0{,}3b^2}-\frac{ab-0{,}7b^2}{a^2-0{,}7ab}$;

б) $\frac{2x-1}{x^2-0{,}5x}+\frac{4x+2}{x^2+0{,}5x}$; д) $\frac{1{,}8xy+0{,}81y^2}{0{,}81y^2-4x^2}+\frac{2x}{2x-0{,}9y}$;

в) $\frac{2y^2-y}{y^2-y+\frac{1}{4}}-\frac{2y^2+y}{y^2+y+\frac{1}{4}}-\frac{1}{y^2-\frac{1}{4}}$; е) $\frac{6a}{2{,}25a^2-0{,}64}-\frac{8}{6a-3{,}2}$.

216 Үзгәрешлеләрнең мөмкин саналган барлык кыйммәтләре өчен

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(a-b)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)}$$

аңлатмасының кыйммәте нульгә тигез икәнен исбатлагыз.

217 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{5}{y-3}+\frac{1}{y+3}-\frac{4y-18}{y^2-9}$;

б) $\frac{2a}{2a+3}+\frac{5}{3-2a}-\frac{4a^2+9}{4a^2-9}$;

в) $\frac{2b^2+10b}{3by+15y}+\frac{b^2-3b}{by-3y}-\frac{2b}{3y}$;

г) $\frac{14ax-21x}{10a-15}-\frac{6ax+9x}{8a+12}+\frac{x}{10}$;

д) $\frac{4m}{4m^2-1}-\frac{2m+1}{6m-3}+\frac{2m-1}{4m+2}$;

е) $\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{2}{x^2-y^2}+\frac{1}{(x-y)^2}$;

ж) $\frac{4a^2+3a+2}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}$;

з) $\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}-\frac{3xy}{x^3-y^3}+\frac{1}{x-y}$.

218 Түбәндәге аңлатмаларның бердәй тигез икәнен исбатлагыз:

$$\frac{ax+by}{(a-b)(x+y)}-\frac{bx-ay}{(a+b)(x+y)} \text{ һәм } \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

219 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$;

б) $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$.

220 Вакланманы бөтен аңлатма белән вакланманың суммасы яки аермасы рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{x^2-3x+6}{x-3}$;

б) $\frac{y^2+5y-8}{y+5}$;

в) $\frac{a^2+7a+2}{a+6}$;

г) $\frac{3b^2-10b-1}{b-3}$.

221 Укучыларга мондый мәсьәлә куела: «$\frac{x^2+7x-25}{x-5}$ вакланмасын бөтен аңлатма бөтен вакланманың суммасы рәвешендә күрсәтергә». Өч җавап алына:

1) $x+5+\frac{7x}{x-5}$; 2) $x+12+\frac{35}{x-5}$; 3) $-x+\frac{2x-25}{x-5}$.

Барлык җаваплар да дөресме?

222 Бердәйлекне исбатлагыз:

а) $\frac{6x}{x+3}=6-\frac{18}{x+3}$; б) $\frac{ax}{x+b}=a-\frac{ab}{x+b}$.

223 a нинди кыйммәткә ия булганда аңлатмалар бердәй тигез:

а) $\frac{2x}{x+3}$ һәм $2+\frac{a}{x+3}$;

б) $\frac{x}{x-5}$ һәм $1+\frac{a}{x-5}$;

в) $\frac{2x}{3-x}$ һәм $\frac{a}{3-x}-2$;

г) $\frac{x+2}{5-x}$ һәм $\frac{a}{5-x}-1$?

224 Вакланманы бөтен аңлатма белән вакланманың суммасы яки аермасы рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{5x}{x+2}$; б) $\frac{-2x}{x-1}$; в) $\frac{2x}{5-x}$; г) $\frac{x-3}{2-x}$.

225 n нинди бөтен кыйммәтләр алганда, вакланманың кыйммәте бөтен сан була:

а) $\frac{5n^2+2n+3}{n}$; б) $\frac{(n-3)^2}{n}$; в) $\frac{3n}{n+2}$; г) $\frac{7n}{n-4}$?

226 Түбәндәге бердәйлек үтәлерлек итеп, a һәм b ның кыйммәтләрен табыгыз:

а) $\frac{5x}{(x-2)(x+3)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+3}$;

б) $\frac{5x+31}{(x-5)(x+2)}=\frac{a}{x-5}-\frac{b}{x+2}$.

3 нче параграфка

227 Тапкырлагыз:

а) $\frac{x^5+x^3}{x^4-x^2}\cdot\frac{x^6-x^3}{x^2+x^4}$; б) $\frac{2m^5-3m^4}{m^4-4m}\cdot\frac{m^4+2m^2}{3m^2-2m^3}$.

228 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{m^5+m^4+m^3}{m^3+m^2}\cdot\frac{m^5+m^3}{m^4+m^3+m^2}$; б) $\frac{n^2-n^4-n^6}{1-n}\cdot\frac{n^2-1}{n^5-n^3+n}$.

229 Гамәлләрне башкарыгыз:

а) $\frac{a^2+ax+ab+bx}{a^2-ax-ab+bx}\cdot\frac{a^2-ax-bx+ab}{a^2+ax-bx-ab}$;

б) $\frac{x^2+ax-3x-3a}{x^2-ax-3x+3a}\cdot\frac{x^2+4x-ax-4a}{x^2+4x+ax+4a}$.

230 Бүлегез:

а) $\frac{a-a^8}{a^6+a^2}:\frac{a^9-a^2}{a^5+a}$; б) $\frac{9x^2-x^6}{x^5+x^7}:\frac{x^4-3x^2}{x^9+x^7}$.

231 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{x^2-bx+ax-ab}{x^2+bx-ax-ab}:\frac{x^2+bx+ax+ab}{x^2-bx-ax+ab}$;

б) $\frac{m^2+m-mn-n}{m^2+m+mn+n}:\frac{m^2-m-mn+n}{m^2-m+mn-n}$.

232 $m\neq n$, $m\neq 0$ һәм $n\neq 0$ булса, $\frac{2}{mn}:\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)^2-\frac{m^2+n^2}{(m-n)^2}$ аңлатмасының кыйммәте үзгәрешлеләрнең кыйммәтләренә бәйле булмавын исбатлагыз.

233 n теләсә нинди натураль сан булганда,

$$\left(\frac{9}{n^2}+\frac{n}{3}\right):\left(\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\right)$$

аңлатмасының кыйммәте натураль сан булуын исбатлагыз.

234 a теләсә нинди бөтен сан, ә x вакланма сан булганда,

$$\left(a-\frac{a^2+x^2}{a+x}\right)\cdot\left(\frac{2a}{x}+\frac{4a}{a-x}\right)$$

аңлатмасының кыйммәте җөп сан булуын исбатлагыз.

235 x ның 2 дән зуррак булган теләсә нинди кыйммәте өчен

$$\left(\frac{x+1}{2x}+\frac{4}{x+3}-2\right):\frac{x+1}{x+3}+\frac{x^2-5x+3}{2x}$$

аңлатмасының кыйммәте тискәре сан булуын исбатлагыз.

236 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\left(a+2b+\frac{4b^2}{a-2b}\right):\left(a-\frac{2ab}{a+2b}\right)+1$;

б) $\frac{3}{x+y}-\frac{3x-3y}{2x-3y}\cdot\left(\frac{2x-3y}{x^2-y^2}-2x+3y\right)$;

в) $\left(\frac{5x^2-15xy}{x^2-9y^2}-\frac{3xy+9y^2}{x^2+6xy+9y^2}\right):\left(\frac{5}{y}-\frac{3}{x}\right)$;

г) $\left(\frac{4a^2-6ac}{4a^2-6ac+9c^2}-\frac{6ac+9c^2}{4a^2+6ac+9c^2}\right)\cdot\frac{6a+9c}{4a^2+9c^2}$.

237 Вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $ab+\frac{ab}{a+b}\left(\frac{a+b}{a-b}-a-b\right)$;

б) $\left(\frac{y^2-xy}{x^2+xy}-xy+y^2\right)\cdot\frac{x}{x-y}+\frac{y}{x+y}$;

в) $\left(\frac{1}{(2a-b)^2}+\frac{2}{4a^2-b^2}+\frac{1}{(2a+b)^2}\right)\cdot\frac{4a^2+4ab+b^2}{16a}$;

г) $\frac{4c^2}{(c-2)^4}:\left(\frac{1}{(c+2)^2}+\frac{1}{(c-2)^2}+\frac{2}{c^2-4}\right)$.

238 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\left(x-\frac{4xy}{x+y}+y\right)\cdot\left(x+\frac{4xy}{x-y}-y\right)$;

б) $\left(a-\frac{1-2a^2}{1-a}+1\right):\left(1-\frac{1}{1-a}\right)$.

239 Бердәйлекне исбатлагыз:

$$\frac{1}{p-2q}+\frac{6q}{4q^2-p^2}-\frac{2}{p+2q}=-\frac{1}{2p}\cdot\left(\frac{p^2+4q^2}{p^2-4q^2}+1\right).$$

240 XVIII гасырның атаклы математигы Л. Эйлер тарафыннан китерелгән бердәйлекләрнең берсе түбәндәгечә:

$$a^3+b^3+\left(\frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}\right)^3=\left(\frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}\right)^3.$$

Бердәйлекне исбатлагыз.

241 Үзгәрешлеләрнең мөмкин саналган барлык кыйммәтләре өчен аңлатманың кыйммәте a һәм b га бәйле түгел икәнен исбатлагыз:

$$\frac{\frac{3}{2}a^2-2ab+\frac{2}{3}b^2}{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{9}b^2}+\frac{6b}{\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b}.$$

242 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\left(\frac{0{,}5b-1{,}5}{0{,}5b^2-1{,}5b+4{,}5}-\frac{2b-6}{\frac{1}{2}b^3+9}\right):\frac{b-3}{0{,}8b^3+21{,}6}$;

б) $\left(\frac{a}{0{,}5a+1}+\frac{\frac{2}{3}a}{2-a}+\frac{2b}{\frac{1}{4}a^2-1}\right)\cdot\frac{0{,}5a-1}{0{,}5a-2}$;

в) $\left(\frac{3{,}6xy+2{,}1y^2}{1{,}44x^2-0{,}49y^2}+\frac{2x}{2{,}4x-1{,}4y}\right)\cdot\frac{12x^2-7xy}{x+3y}$;

г) $\left(\frac{1}{0{,}5x+y}-\frac{2y}{0{,}25x^2+xy+y^2}\right):\left(\frac{0{,}5x}{0{,}25x^2-y^2}+\frac{1}{2y-x}\right)+2$.

243 Рациональ вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{x-\frac{yz}{y-z}}{y-\frac{xz}{x-z}}$; б) $\frac{\frac{a-x}{a}+\frac{x}{a-x}}{\frac{a+x}{a}-\frac{x}{a+x}}$; в) $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$; г) $\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$.

244 $A\ (-4;\ 1)$, $B\ (8;\ 0{,}5)$, $C\ (0;\ 0)$, $D\ (0{,}01;\ -400)$, $E\ (16;\ \frac{1}{4})$, $F\ (40;\ 0{,}1)$, $G\ (1000;\ -0{,}004)$, $K\ (-0{,}004;\ -1000)$ нокталарыннан кайсылары $y=-\frac{4}{x}$ функциясе графигыныкы була?

245 $P\ (-9;\ 18)$ ноктасы $y=\frac{k}{x}$ рәвешендәге формула белән бирелгән функция графигыныкы икәне билгеле. k ның кыйммәтен табыгыз.

246 а) A (40; 0,025); в) C (0,016; $6\frac{1}{4}$); б) B (0,03125; 32); г) D (0,125; 0,8) ноктасы $y = \frac{1}{x}$ функциясе графигыныкы буламы?

247 $y = \frac{k}{x}$ функциясе графигының A (10; 2,4) ноктасы аша үтүе билгеле. Бу функциянең графигы

а) B (1; 24); б) C $(-\frac{1}{5}; -120)$; в) D (−2; 12)

ноктасы аша үтәме?

248 Функциянең билгеләнү өлкәсен табыгыз һәм аның графигын төзегез:

а) $y = \frac{36}{(x+1)^2-(x-1)^2}$; в) $y = \frac{16}{(2-x)^2-(2+x)^2}$;

б) $y = \frac{18-12x}{x^2-3x} - \frac{6}{3-x}$; г) $y = \frac{3x(x+1)-3x^2+15}{x(x+5)}$.

249 Функциянең графигын төзегез:

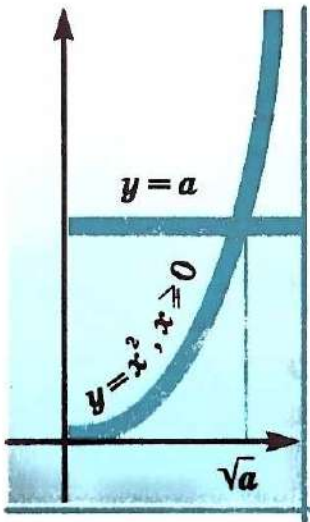
а) $y = \frac{4}{|x|}$; в) $y = \frac{1}{|x|}$; д) $y = -\frac{6}{|x|}$;

б) $y = \frac{2,4}{|x|}$; г) $y = \frac{-1}{|x|}$; е) $y = \frac{-3,6}{|x|}$.

250 k һәм b нинди кыйммәтләргә ия булганда, $y = \frac{k}{x}$ гиперболасы һәм $y = kx + b$ турысы
а) P (2; 1); б) Q (−2; 3); в) R (−1; 1)
ноктасы аша үтә?

251 $y = \frac{k}{x}$ һәм $y = ax + b$ функцияләренең графиклары
а) бер ноктада гына;
б) ике ноктада гына;
в) өч ноктада кисешә аламы?

252 $y = \frac{k}{x}$ һәм $y = ax + b$ функцияләренең графиклары
а) бер чиректә;
б) беренче һәм икенче чирекләрдә;
в) беренче һәм өченче чирекләрдә яткан ике ноктада кисешә аламы?



II бүлек

Квадрат тамырлар

§ 4. Реаль саннар

9. Рациональ саннар

Математика курсында без төрле саннар белән очраштык. Санаганда кулланыла торган 1, 2, 3, ... саннары натураль саннар күплеген тәшкил итә. Натураль саннар, аларга капма-каршы булган саннар һәм нуль саны бөтен саннар күплеген тәшкил итә. Бөтен саннардан тыш, безгә вакланма (уңай һәм тискәре) саннар билгеле. *Бөтен һәм вакланмалы саннар рациональ саннар күплеген тәшкил итә.*

Натураль саннар күплеген, гадәттә, N хәрефе белән, бөтен саннар күплеген Z хәрефе белән, рациональ саннар күплеген Q хәрефе белән тамгалыйлар. Нинди дә булса сан тикшерелә торган күплекнеке икәнен язу өчен, $\in$ тамгасын кулланалар. Мәсәлән, 2 саны натураль сан була (яки 2 саны натураль саннар күплегенә керә), дигән расланманы болай язарга була: $2 \in N$. -2 саны натураль сан түгел; моны $\notin$ тамгасы ярдәмендә язарга була: $-2 \notin N$.

Теләсә нинди рациональ санны (бөтен санны, шулай ук вакланмалы санны) $\frac{m}{n}$ вакланмасы рәвешендә күрсәтеп була, биредә m — бөтен сан, ә n — натураль сан. Бер үк рациональ санны төрле ысуллар белән түбәндәгечә күрсәтеп була.

Мәсәлән,

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{5}{10}=\frac{40}{80};\ -0,7=\frac{-7}{10}=\frac{-28}{40};$$

$$5=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{20}{4}.$$

Бирелгән рациональ сан нинди генә вакланма рәвешендә язылса да, шул вакланмалар арасыннан ваклаучысы иң кечкенә булган вакланманы күрсәтеп була. Ул вакланма кыскармый. Бөтен саннар өчен ул ваклаучысы 1 гә тигез вакланма була.

«Рациональ сан» термины латинча *ratio* сүзеннән килеп чыккан, татарчага тәрҗемә иткәндә «чагыштырма» (өлеш) дигәнне аңлата.

Рациональ саннарны унарлы вакланмалар рәвешендә күрсәтүне карыйк.

Мәсәлән, $\frac{1}{8}$ санын унарлы вакланма рәвешендә күрсәтик. Моның өчен вакланманың санаучысын аның ваклаучысына бүләбез:

$$\begin{array}{r|l}
1 & 8 \\ \hline
-10 & 0{,}125 \\
8 & \\ \hline
-20 & \\
16 & \\ \hline
-40 & \\
40 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Димәк, $\frac{1}{8} = 0{,}125$.

$\frac{2}{5} = 0{,}4$; $1\frac{3}{20} = 0{,}4$; $-\frac{1}{40} = -0{,}025$ икәнен нәкъ шулай ук таба алабыз.

Хәзер гади вакланманы унарлы вакланмага әйләндерүнең бу ысулын $\frac{8}{37}$ санына карата кулланыйк. Санаучыны ваклаучыга бүләбез:

$$\begin{array}{r|l}
8 & 37 \\ \hline
-80 & 0{,}216216 \\
74 & \\ \hline
-60 & \\
37 & \\ \hline
-230 & \\
222 & \\ \hline
-80 & \\
74 & \\ \hline
-60 & \\
37 & \\ \hline
-230 & \\
222 & \\ \hline
8 &
\end{array}$$

Бүлгәндә килеп чыккан беренче калдык 8 саны үзе була. Икенче калдык 6 га, өченчесе 23 кә тигез. Аннары калдыкта тагын 8 чыкты. Бүлүне дәвам итеп, без, элекке кебек үк, калдыкларга нульләр өстәп язабыз. Шуңа күрә киләсе калдык яңадан 6 булыр, аннары 23 кә тигез һәм яңадан 8 гә тигез калдык табарбыз һ. б. Без бүлүне никадәр генә дәвам иттерсәк тә, калдыкта 0 таба алмабыз. Димәк, бүлү бервакытта да тәмамланмас. Мондый очракта $\frac{8}{37}$ вакланмасы 0,216216... чиксез унарлы вакланмасына әйләнә, диләр:

$$\frac{8}{37} = 0{,}216216\ldots\,.$$

8 санаучысын 37 ваклаучысына бүлгәндә эзлекле рәвештә 8, 6 һәм 23 калдыклары кабатланганлыктан, өлештә дә шул ук тәртиптә өч цифр: 2, 1, 6 кабатлана барыр. Мондый рәвешле чиксез унарлы вакланмаларны *периодик вакланмалар* дип атыйлар. Цифрларның кабатлана торган өлеше *вакланманың периодын* төзи. Периодик унарлы вакланмаларны язганда, периодны, түгәрәк җәя эченә алып, бер тапкыр язалар:

$$\frac{8}{37} = 0{,}(216).$$

Бу язманы болай укыйлар: нуль бөтен, периодта ике йөз уналты.

$\frac{7}{12}$ санын шулай ук чиксез периодик унарлы вакланма рәвешендә күрсәтеп була: $\frac{7}{12} = 0{,}58333\ldots = 0{,}58(3)$. Бу язма болай укыла: нуль бөтен йөздән илле сигез, периодта өч.

$5\frac{1}{6} = 5{,}1(6)$, $-\frac{5}{11} = -0{,}(45)$ икәнен дә нәкъ шулай ук күрсәтеп була.

Гомумән, һәр вакланмалы санны я унарлы вакланма (чикле унарлы вакланма), я периодик чиксез унарлы вакланма рәвешендә күрсәтеп була.

Теләсә нинди чикле унарлы вакланманы һәм теләсә нинди бөтен санны периодик чиксез унарлы вакланма рәвешендә язып була, моның өчен аның уң ягына чиксез санда нуль язалар. Мәсәлән,

$$2{,}5 = 2{,}5000\ldots; \quad -3 = -3{,}000\ldots\,.$$

Шулай итеп,

һәр рациональ санны периодик чиксез унарлы вакланма рәвешендә күрсәтеп була.

Раслауның киресе дә дөрес:

Һәр периодик чиксез унарлы вакланма нинди дә булса рациональ санны бирә.

Мәсәлән, $0,(3) = \frac{1}{3}$; $2,(36) = 2\frac{4}{11}$; $0,0(945) = \frac{7}{74}$. Бүлүне эшләп, бу тигезлекләрне җиңел тикшереп була.

Төрле периодик чиксез унарлы вакланмалар төрле рациональ саннарны бирәләр. Ләкин периоды 9 га тигез булган вакланмаларны периоды 0 булган вакланмаларның икенче төрле язылышы дип исәплиләр.

$$0,(9) = 0,999... = 1,000... = 1;$$
$$16,1(9) = 16,1999... = 16,2000... = 16,2.$$

Периоды 9 га тигез булган чиксез унарлы вакланмаларны периоды 0 гә тигез булган вакланмалар белән алыштыралар. Гади вакланманы унарлы вакланмага әйләндергәндә, периоды 9 га тигез булган вакланманың килеп чыгуы мөмкин түгеллеген искәртеп китәбез.

Күнегүләр

253 -100; $-14,5$; -2; $-\frac{2}{3}$; 0; 10; 15; $20\frac{1}{6}$ саннарыннан кайсылары

а) натураль; б) бөтен; в) рациональ сан була?

254 Түбәндәге җөмләләр дөресме:

а) һәр натураль сан бөтен сан була;

б) һәр бөтен сан натураль сан була;

в) һәр бөтен сан рациональ сан була;

г) һәр рациональ сан бөтен сан була?

255 Дөресме:

а) $27 \in N$; б) $2,7 \notin N$; в) $0 \in Z$; г) $-8 \notin Z$?

256 Дөресме:

а) $-4 \in N$; в) $-4 \in Z$; $-4 \in Q$;

б) $5,6 \notin N$; в) $5,6 \in Z$; $5,6 \in Q$;

в) $28 \in N$; в) $28 \in Z$; $28 \in Q$?

257 Түбәндәге саннарны берничә ысул белән бөтен санның натураль санга чагыштырмасы рәвешендә күрсәтегез: $1\frac{2}{5}$; 0,3; $-3\frac{1}{4}$; -27; 0.

258 Түбәндәге саннарны ваклаучысы иң кечкенә натураль сан булган вакланма рәвешендә күрсәтегез: 36; -45; 4,2; $-0,8$; $15\frac{1}{6}$; $-\frac{2}{9}$.

259 Санны чиксез унарлы вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{7}$; д) $-\frac{8}{15}$; ж) -17; и) $-1\frac{3}{40}$;

б) $\frac{5}{6}$; г) $-\frac{20}{9}$; е) 10,28; з) $\frac{3}{16}$; к) $2\frac{7}{11}$.

260 Санны чиксез унарлы вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{5}{3}$; б) $\frac{7}{30}$; в) $\frac{3}{7}$; г) $-\frac{5}{8}$; д) 1,347; е) -125.

261 Рациональ саннарны чагыштырыгыз:

а) 0,013 һәм 0,1004; г) $\frac{3}{8}$ һәм 0,375;

б) -24 һәм 0,003; д) $-1,174$ һәм $-1\frac{7}{40}$;

в) $-3,24$ һәм $-3,42$; е) $\frac{10}{11}$ һәм $\frac{11}{12}$.

262 Саннарны чагыштырыгыз:

а) 1,009 һәм 1,011; в) $-1\frac{3}{4}$ һәм $-1,75$;

б) $-2,005$ һәм $-2,04$; г) 0,437 һәм $\frac{7}{16}$.

263 а) 10 һәм 10,1; в) -1001 һәм -1000;

б) $-0,001$ һәм 0; г) $\frac{1}{3}$ һәм $\frac{2}{3}$

саннары арасында урнашкан берничә санны күрсәтегез.

264 а) 1,3 һәм 1,4; в) $-10\,000$ һәм -1000;

б) 5 һәм $5\frac{1}{6}$; г) $-\frac{1}{3}$ һәм $-\frac{1}{4}$

саннары арасында яткан биш сан әйтегез.

Кабатлау өчен күнегүләр

265 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{a}{a-b}+\frac{3a}{a+b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}$; б) $\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{x}{x^2-1}$.

266 а) Ике җөп санның суммасы — җөп сан;
б) җөп һәм так санның суммасы так сан булуын исбатлагыз.

267 а) Җөп санның квадраты җөп сан була;
б) так санның квадраты так сан булуын исбатлагыз.

268 а) $x = 10$; 0,3; 0; $-2,7$; -9 булса, $|x|$ ны;

б) $|x| = 6$; $|x| = 3,2$; $|x| = 0$ булса, x ны табыгыз.

269 Аңлатманы модуль тамгасыннан башка языгыз:

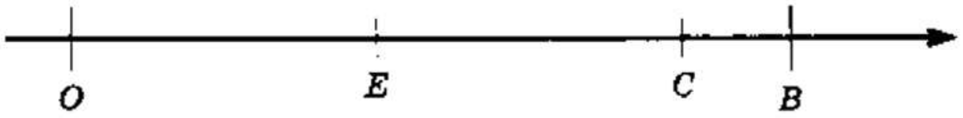
а) $|a|$, биредә $a > 0$; в) $|2b|$, биредә $b < 0$;

б) $|c|$, биредә $c < 0$; г) $|3c|$, биредә $c \geq 0$.

10. Иррациональ саннар

О ноктасы — координаталар турысының башлангыч ноктасы һәм OE берәмлек кисемтә булсын. OE кисемтәсе ярдәмендә теләсә нинди кисемтәнең озынлыгын үлчәргә мөмкин.

Мәсәлән, OB кисемтәсенең озынлыгын үлчик (рәс.6). OE кисемтәсе OB кисемтәсендә ике тапкыр сыя, һәм моннан соң әле CB калдыгы кала,

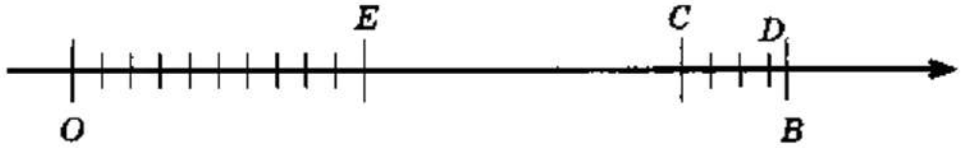


Рәс. 6

ул берәмлек кисемтәдән кечерәк. Димәк, 2 саны OB кисемтәсе озынлыгының 1 гә кадәрге төгәллек белән алынган якынча кыйммәте (киме белән) була:

$$OB \approx 2.$$

Тагын да төгәлрәк нәтиҗә табу өчен, берәмлек кисемтә OE ны 10 тигез өлешкә бүләбез (рәс.7). OE кисемтәсенең унынчы өлеше CB калдыгында өч тапкыр урнаша. Бу вакытта OE кисемтәсенең



Рәс. 7

унынчы өлешеннән кечерәк булган яңа DB калдыгы кала. 2,3 саны OB кисемтәсе озынлыгының 0,1 гә кадәр төгәллек белән алынган якынча кыйммәте (киме белән) була:

$$OB \approx 2{,}3.$$

Үлчәү процессын дәвам итеп, без берәмлек кисемтәнең йөзенче, меңенче һ. б. өлешләрен файдаланырбыз һәм OB кисемтәсе озынлыгының (киме белән) 0,01 гә, 0,001 гә һ. б. кадәр төгәллек белән якынча кыйммәтләрен табарбыз.

Унарлы исәпләү системасында үлчәгәндә ике очрак булырга мөмкин: яки кайсы да булса адымда калдык калмый, яки калдыклар һәр адымда табылыр.

Беренче очракта үлчәү нәтиҗәсе — натураль сан яки унарлы вакланма, икенче очракта чиксез

унарлы вакланма булыр. Теләсә кайсы натураль санны һәм теләсә кайсы унарлы вакланманы чиксез унарлы вакланма рәвешендә язарга мөмкин булганлыктан, чиксез унарлы вакланманы һәрвакыт кисемтә озынлыгының унарлы үлчәү нәтиҗәсе дип санарга була.

1 нче мисал. *OC* кисемтәсе берәмлек кисемтәнең $\frac{7}{4}$ сенә тигез булсын. Аның озынлыгын унарлы исәпләү системасында үлчәгәндә, 1,75 санын, ягъни 7 не 4 кә бүлгәндәге унарлы вакланманы табарбыз. Үлчәү нәтиҗәсен 1,75000... периодик чиксез унарлы вакланмасы рәвешендә язарга мөмкин.

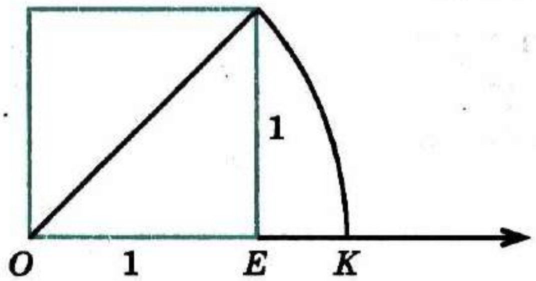
2 нче мисал. *OK* кисемтәсе берәмлек кисемтәнең $\frac{8}{3}$ сенә тигез булсын. Аның озынлыгын унарлы системада үлчәгәндә, 8 не 3 кә бүлгәндәге кебек ук 2,666... периодик чиксез унарлы вакланмасы чыгар.

3 нче мисал. *OK* кисемтәсе ягы берәмлек кисемтә булган квадратның диагоналенә тигез (рәс. 8). Берәмлек квадратның диагонале белән яңа квадрат төзибез (рәс. 9). 9 нчы рәсемнән күренгәнчә, бу квадратның мәйданы берәмлек квадрат мәйданыннан ике тапкыр зуррак. Димәк, ул 2 гә тигез. *OK* кисемтәсе яңа квадратның ягына тигез булганлыктан, *OK* кисемтәсенең озынлыгы квадраты 2 гә тигез булган санга тигез.

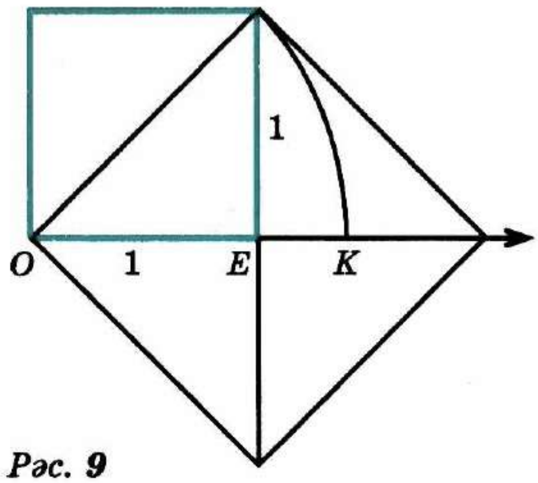
OK кисемтәсен унарлы системада үлчәгәндә периодик булмаган чиксез унарлы вакланма килеп чыгар. Бу шуның белән аңлатыла:

рациональ саннар арасында квадраты 2 гә тигез булган сан юк.

● Квадраты 2 гә тигез булган сан рациональ сан була дип уйлыйк. Ул вакытта аны кыскартылмас $\frac{m}{n}$ вакланмасы рәвешендә күрсәтергә мөмкин,



Рәс. 8



Рәс. 9

биредә m — бөтен сан, ә n — натураль сан. $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, шуңа күрә $\frac{m^2}{n^2} = 2$ һәм $m^2 = 2n^2$ була. $2n^2$ саны — җөп сан, димәк, аңа тигез булган m^2 саны да җөп сан. Ул вакытта m саны үзе дә җөп сан була (әгәр m саны так сан булса, m^2 саны да так сан булыр иде). Шуңа күрә m санын $m = 2k$ рәвешендә күрсәтергә мөмкин, биредә k — бөтен сан. $m^2 = 2n^2$ тигезлегенә m урынына $2k$ ны куябыз: $(2k)^2 = 2n^2$, $4k^2 = 2n^2$, $2k^2 = n^2$ килеп чыга.

$2k^2$ саны — җөп сан, димәк, аңа тигез булган n^2 саны шулай ук җөп сан. Ул вакытта инде n саны да җөп сан була. Без $\frac{m}{n}$ вакланмасының санаучысы да, ваклаучысы да җөп сан була дигән нәтиҗәгә килдек. Ләкин бу $\frac{m}{n}$ кыскартылмас вакланма булуына каршы килә. Димәк, квадраты 2 гә тигез булган рациональ сан бар дигән фараз дөрес түгел. ○

Шулай итеп, кисемтәләр озынлыгын унарлы системада үлчәү координаталар турысындагы башлангыч O ноктасыннан уң якта ятучы һәр ноктага уңай чиксез унарлы вакланманы тиңдәш итеп куя. Киресенчә, ирекле булган уңай чиксез унарлы вакланма алып, без координаталар турысында O ноктасының уң ягында OA кисемтәсенең озынлыгы әлеге вакланма белән белдерелә торган бердәнбер A ноктасын таба алабыз.

Әгәр уңай чиксез унарлы вакланмаларга аларга капма-каршы саннарны һәм нуль санын кушсак, *реаль саннар* дип аталган саннар күплеген табарбыз.
Координаталар турысының һәр ноктасына нинди дә булса реаль сан тиңдәш була, һәм һәр реаль санга координаталар турысындагы нокта тиңдәш була. Реаль саннар күплеген $\mathbb{R}$ хәрефе белән тамгалау кабул ителгән.

Чиксез унарлы вакланмалар периодик һәм периодик булмаска мөмкин. Периодик чиксез унарлы вакланмалар рациональ саннар була. Һәр шундый санны $\frac{m}{n}$ чагыштырмасы рәвешендә язарга мөмкин, биредә m — бөтен сан, ә n — натураль сан. Периодик булмаган чиксез унарлы вакланмалар рациональ булмаган саннарны бирә. Аларны *иррациональ саннар* дип атыйлар («ир» алкушымчасы кире кагуны, булмауны белдерә). Иррациональ саннарны $\frac{m}{n}$ чагыштырмасы (биредә

m — бөтен сан, ә n — натураль сан) рәвешендә күрсәтеп булмый. Шулай итеп,

реаль саннар күплеге рациональ һәм иррациональ саннардан тора.

Иррациональ саннарга мисаллар китерик:

3,010010001... (берләр эзлекле рәвештә бер, ике, өч һ. б. нульләр белән аерылалар);

−5,020022000222... (нульләр саны һәм икелекләр саны һәрчак бергә арта).

Әйләнә озынлыгының диаметрга чагыштырмасын белдергән π саны иррациональ сан була:

$$\pi = 3{,}1415926\ldots .$$

Чиксез унарлы вакланмалар ярдәмендә язылган реаль саннарны да чикле унарлы вакланмаларның кагыйдәләре буенча чагыштыралар.

Мәсәлән, 2,36366... һәм 2,37011... саннарын чагыштырыйк. Бу уңай чиксез унарлы вакланмаларда бөтен кисәкләре һәм унынчы өлеш цифрлары бертигез, ә йөзенче өлеш разрядларында беренче вакланманың берәмлекләр саны икенчесенекеннән кимрәк. Шуңа күрә

$$2{,}36366\ldots < 2{,}37011\ldots .$$

0,253... һәм −0,149... саннарын чагыштырыйк. Бу саннарның беренчесе уңай, ә икенчесе — тискәре. Шуңа күрә

$$0{,}253\ldots > -0{,}149\ldots .$$

Реаль саннарны кушарга, алырга, тапкырларга, бүләргә мөмкин (бүлүче нульгә тигез булмаганда), шуның белән бергә, реаль саннар белән гамәлләр рациональ саннар белән эшләнә торган гамәлләрнең шул ук үзлекләренә ия. Практик мәсьәләләрдә реаль саннар белән гамәлләр

КАРЛ ВЕЙЕРШТРАСС (1815—1897)

— немец математигы, Петербург Фәннәре академиясенең мактаулы әгъзасы. Математик анализ һәм математиканың башка бүлекләре буенча күпсанлы хезмәтләре бар.

башкарганда, аларны якынча кыйммәтләре белән алыштыралар. Якынча кыйммәтләрнең төгәллеген арттыра барып, нәтиҗәнең тагын да төгәлрәк кыйммәтен табарга була.

1 нче мисал. a һәм b саннары суммасының якынча кыйммәтен табабыз, биредә $a = \frac{1}{3}$, $b = 1{,}7132...$.

▶ Кушылучыларның якынча кыйммәтләрен 0,1 гә кадәр төгәллек белән алабыз: $a \approx 0{,}3$, $b \approx 1{,}7$. Табабыз:

$$a + b \approx 0{,}3 + 1{,}7 = 2{,}0.$$

Әгәр кушылучыларның якынча кыйммәтләрен 0,01 гә кадәр төгәллек белән алсак, ягъни $a \approx 0{,}33$ һәм $b \approx 1{,}71$ булса табабыз:

$$a + b \approx 0{,}33 + 1{,}71 = 2{,}04. \triangleleft$$

2 нче мисал. Радиусы $r = 5$ м булган әйләнә озынлыгын табыйк.

▶ Әйләнә озынлыгы $l = 2\pi r$ формуласы белән исәпләнә. $\pi \approx 3{,}14$ дип алыйк. Ул вакытта

$$l \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4 \text{ (м)}. \triangleleft$$

Күнегүләр

270 Мисал китерегез:
а) рациональ санга; б) иррациональ санга.

271 а) Һәр рациональ сан реаль сан була;
б) һәр реаль сан рациональ сан була;
в) һәр иррациональ сан реаль сан була;
г) һәр реаль сан иррациональ сан була дип әйтү дөресме?

272 $\frac{1}{7}$; 0; 0,25; −2,(3); 0,818118111... (сигезлекләрне аеручы берләр саны бергә арта бара); 4,2(51); 217; π саннары арасында рациональ, иррациональ саннарны күрсәтегез.

273 Дөресме:
а) $7{,}16 \in \boldsymbol{N}$; $7{,}16 \in \boldsymbol{Z}$; $7{,}16 \in \boldsymbol{Q}$; $7{,}16 \in \boldsymbol{R}$;
б) $409 \in \boldsymbol{N}$; $409 \in \boldsymbol{Z}$; $409 \in \boldsymbol{Q}$; $409 \in \boldsymbol{R}$;
в) $\pi \in \boldsymbol{N}$; $\pi \in \boldsymbol{Z}$; $\pi \in \boldsymbol{Q}$; $\pi \in \boldsymbol{R}$?

274 Чагыштырыгыз:
а) 7,653... һәм 7,563... ; в) −48,075... һәм −48,275... ;
б) 0,123... һәм 0,114... ; г) −1,444... һәм −1,456... .

275 Ике санның кайсысы зуррак:
а) 1,(56) яки 1,56; г) −0,228 яки $-\frac{5}{22}$;
б) − 4,(45) яки − 4,45; д) π яки 3,1415;
в) $1\frac{2}{3}$ яки 1,6668; е) 3,(14) яки π?

276 Саннарны чагыштырыгыз:

а) 9,835... һәм 9,847... ; в) $2\frac{1}{7}$ һәм 2,142;

б) – 1,(27) һәм – 1,272; г) 1,(375) һәм $1\frac{3}{8}$.

277 4,62; 3,(3); –2,75...; –2,63 саннарын үсә бару тәртибендә языгыз.

278 1,371... ; 2,065; 2,056... ; 1,(37); –0,078 саннарын кими бару тәртибендә языгыз.

279 $a = 1,0539...$ һәм $b = 2,0610...$ булганда, a һәм b ны башта а) унынчы өлешләргә; б) йөзенче өлешләргә; в) меңенче өлешләргә кадәр түгәрәкләп, $a + b$ аңлатмасының якынча кыйммәтен табыгыз.

280 $a = 59,678...$ һәм $b = 43,123...$ булганда, a һәм b ны башта а) унынчы өлешләргә; б) йөзенче өлешләргә кадәр түгәрәкләп, $a - b$ аңлатмасының якынча кыйммәтен табыгыз.

281 Радиусы 4,5 см га тигез булган әйләнә озынлыгының якынча кыйммәтен табыгыз (π санын йөзенче өлешләргә кадәр түгәрәкләгез).

282 Радиусы 10 м га тигез булган түгәрәк мәйданының якынча кыйммәтен табыгыз (π санын йөзенче өлешләргә кадәр түгәрәкләгез).

Кабатлау өчен күнегүләр

283 Аңлатманы гадиләштерегез:

$$\left(\frac{a+b}{b}-\frac{a}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{a}-\frac{b}{a+b}\right).$$

284 $x = -2,5;\ 0;\ 4;\ 5;\ 9,5$ булганда, $|2x - 8|$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

285 а) $a > 0$ һәм $b > 0$;
б) $a < 0$ һәм $b > 0$ булганда, $|ab|$ аңлатмасын гадиләштерегез.

286 $y = \frac{k}{x}$ функциясе графигының A (4; – 0,5) ноктасы аша үтүе билгеле. k ны табыгыз һәм ул графикны төзегез.

Контроль сораулар

1 Нинди саннар рациональ саннар күплеген төзиләр?
2 Нинди саннар иррациональ саннар дип атала?
3 Нинди саннар реаль саннар күплеген төзи?
4 Нинди реаль саннарны бөтен санның натураль санга чагыштырмасы рәвешендә күрсәтеп була һәм кайсыларын күрсәтеп булмый?

§ 5. Арифметик квадрат тамыр

11. Квадрат тамырлар. Арифметик квадрат тамыр

Квадратның мәйданы 64 $см^2$ булсын. Бу квадратның ягы нинди озынлыкта?

Квадрат ягының озынлыгын (сантиметрларда) x хәрефе белән билгелик. Ул вакытта квадратның мәйданы x^2 $см^2$ булыр. Шарт буенча мәйдан 64 $см^2$ га тигез, димәк, $x^2 = 64$.

8 һәм -8 саннары $x^2 = 64$ тигезләмәсенең тамырлары була. Дөрестән дә, $8^2 = 64$ һәм $(-8)^2 = 64$. Квадратның ягы тискәре сан белән күрсәтелә алмаганлыктан, мәсьәләнең шартын бу тамырларның берсе, ягъни 8 саны гына канәгатьләндерә. Шулай итеп, квадрат ягының озынлыгы 8 см га тигез.

$x^2 = 64$ тигезләмәсенең тамырларын, ягъни квадратлары 64 кә тигез саннарны 64 саныннан *квадрат тамырлар* дип атыйлар.

Билгеләмә. Квадраты a га тигез булган санны a саныннан квадрат тамыр дип атыйлар.

$x^2 = 64$ тигезләмәсеннән тискәре булмаган тамырны, ягъни 8 санын 64 саныннан *арифметик квадрат тамыр* дип атыйлар. Икенче төрле әйткәндә, 64 тән арифметик квадрат тамыр — квадраты 64 кә тигез булган тискәре булмаган сан.

Билгеләмә. Квадраты a га тигез булган тискәре булмаган сан a саныннан арифметик квадрат тамыр дип атала.

a саныннан арифметик квадрат тамырны $\sqrt{a}$ дип тамгалыйлар. $\sqrt{a}$ тамгасын *арифметик квадрат тамыр тамгасы* дип, тамыр тамгасы астында торган аңлатманы *тамырасты аңлатмасы* дип атыйлар. $\sqrt{a}$ язмасын болай укыйлар: «a саныннан квадрат тамыр» (укыганда «арифметик» сүзен төшереп калдыралар).

Арифметик квадрат тамырларны табуга (яки, башкача әйткәндә, тамыр алуга) мисаллар китерәбез:

$\sqrt{4} = 2$, чөнки 2 — тискәре булмаган сан һәм $2^2 = 4$.

$\sqrt{1,21} = 1,1$, чөнки 1,1 — тискәре булмаган сан һәм $1,1^2 = 1,21$.

$\sqrt{0} = 0$, чөнки 0 — тискәре булмаган сан һәм $0^2 = 0$.

Гомумән,

$\sqrt{a} = b$ тигезлеге дөрес тигезлек була, әгәр ике шарт үтәлсә:

$$1)\ b \geq 0;\quad 2)\ b^2 = a.$$

$a < 0$ булганда, $\sqrt{a}$ аңлатмасының мәгънәсе булмый.

Дөрестән дә, теләсә нинди санның квадраты тискәре түгел.

Мәсәлән, $\sqrt{-25}$; $\sqrt{-3,7}$ аңлатмаларының мәгънәләре юк.

Арифметик квадрат тамыр билгеләмәсеннән теләсә нинди a өчен $\sqrt{a}$ аңлатмасының мәгънәсе булганда,

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

тигезлегенең дөрес икәнлеге килеп чыга.

Күнегүләр

287 а) 5 саны 25 санының арифметик квадрат тамыры икәнен; б) 0,3 саны 0,09 санының арифметик квадрат тамыры икәнен; в) −7 саны 49 санының арифметик квадрат тамыры булмавын; г) 0,6 саны 3,6 санының арифметик квадрат тамыры булмавын исбатлагыз.

288 Тигезлекнең дөреслеген исбатлагыз:

а) $\sqrt{121} = 11$; в) $\sqrt{1,44} = 1,2$;

б) $\sqrt{169} = 13$; г) $\sqrt{0,49} = 0,7$.

289 Тамырның кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{81}$; г) $\sqrt{1600}$; ж) $\sqrt{0,04}$; к) $\sqrt{\frac{81}{4}}$;

б) $\sqrt{64}$; д) $\sqrt{2500}$; з) $\sqrt{0,25}$; л) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$;

в) $\sqrt{36}$; е) $\sqrt{10\,000}$; и) $\sqrt{0,81}$; м) $\sqrt{1\frac{24}{25}}$.

290 Исәпләгез:

а) $\sqrt{400}$; д) $\sqrt{0,16}$; и) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$;

б) $\sqrt{900}$; е) $\sqrt{0,64}$; к) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$.

в) $\sqrt{4900}$; ж) $\sqrt{\frac{36}{49}}$;

г) $\sqrt{0,01}$; з) $\sqrt{\frac{121}{64}}$;

291 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $a = 32$, $b = 4$; $a = 33$, $b = -8$; $a = 0,65$, $b = 0,16$; $a = -25$, $b = 26$ булганда, $\sqrt{a+b}$ ның;

б) $x = 7$; 23; 1,83 булганда, $\sqrt{3x-5}$ ның;

в) $x = 0$; 0,01; 0,36; 0,64; 1; 25; 100; 3600 булганда, $x + \sqrt{x}$ ның.

292 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $x = 25$, $y = 0$; $x = 0$, $y = 1$; $x = \frac{9}{25}$; $y = 0,36$ булганда, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ның;

б) $a = 0$; 2; 1,5; $-22,5$ булганда, $\sqrt{4-2a}$ ның.

293 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{16}$; д) $3\sqrt{9} - 16$;

б) $\sqrt{81} : \sqrt{100}$; е) $-7\sqrt{0,36} + 5,4$;

в) $\sqrt{0,09} + \sqrt{0,25}$; ж) $0,1\sqrt{400} + 0,2\sqrt{1600}$;

г) $\sqrt{0,04} - \sqrt{0,01}$; з) $\frac{1}{3}\sqrt{0,36} + \frac{1}{5}\sqrt{900}$.

294 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $0,6\sqrt{36}$; д) $-\sqrt{0,0036} + \sqrt{0,0025}$;

б) $-2,5\sqrt{25}$; е) $\sqrt{0,01} - \sqrt{0,0001}$;

в) $\sqrt{0,49} + \sqrt{0,16}$; ж) $\frac{1}{3}\sqrt{0,81} - 1$;

г) $\sqrt{0,64} - \sqrt{0,04}$; з) $4 - 10\sqrt{0,01}$.

295 11 дән 20 гә кадәрге натураль саннарның квадратлары таблицасыннан файдаланып табыгыз:

а) $\sqrt{144}, \sqrt{289}, \sqrt{196}, \sqrt{256}$;

б) $\sqrt{225}, \sqrt{169}, \sqrt{324}, \sqrt{361}$;

в) $\sqrt{1,21}, \sqrt{2,89}, \sqrt{1,69}, \sqrt{3,61}$;

г) $\sqrt{1,44}, \sqrt{3,24}, \sqrt{2,56}, \sqrt{2,25}$.

296 Аңлатманың мәгънәсе бармы:

а) $\sqrt{100}$; в) $-\sqrt{100}$; д) $\sqrt{(-25)\cdot(-4)}$;

б) $\sqrt{-100}$; г) $\sqrt{(-10)^2}$; е) $\sqrt{-25\cdot 4}$?

297 Арифметик квадрат тамыры 0; 1; 3; 10; 0,6 га тигез булган санны табыгыз.

298 x үзгәрешлесенең кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{x}=4$; в) $2\sqrt{x}=0$; д) $\sqrt{x}-8=0$;

б) $\sqrt{x}=0,5$; г) $4\sqrt{x}=1$; е) $3\sqrt{x}-2=0$.

299 x үзгәрешлесенең кыйммәте бармы, әгәр

а) $\sqrt{x}=0,1$; в) $\sqrt{x}+1=0$;

б) $\sqrt{x}=-10$; г) $\sqrt{x}-3=0$ булса?

300 Үзгәрешленең нинди кыйммәте өчен тигезлек дөрес:

а) $\sqrt{x}=11$; в) $\sqrt{x}=-20$; д) $5-\sqrt{x}=0$;

б) $10\sqrt{x}=3$; г) $2\sqrt{x}-1=0$; е) $2+\sqrt{x}=0$?

301 Тигезлек дөрес булырлык итеп, x үзгәрешлесенең кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{3+5x}=7$; б) $\sqrt{10x-14}=11$; в) $\sqrt{\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}}=0$.

Кабатлау өчен күнегүләр

302 Миллиметрлы кәгазьдә x ның -3 тән 3 кә кадәрге кыйммәтләре өчен $y=x^2$ функциясенең графигын төзегез. График ярдәмендә:

а) $x=-2,5; -1,3; -0,8; 0,6; 1,7; 2,3$ кә туры килә торган y кыйммәтен;

б) y ның 1; 2; 5; 7,5 кә тигез булган кыйммәтләренә тиңдәш x кыйммәтләрен;

в) $-1,4; -0,8; 1,2; 2,8$ саннарының квадратларын;

г) квадратлары 0,5; 2,5; 3; 4; 5; 9 га тигез саннарны табыгыз.

303 $x=-2$ булганда, $x^2\left(x-1+\frac{1}{1-x}\right)\cdot\frac{x^2-x}{(2-x)^2}$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

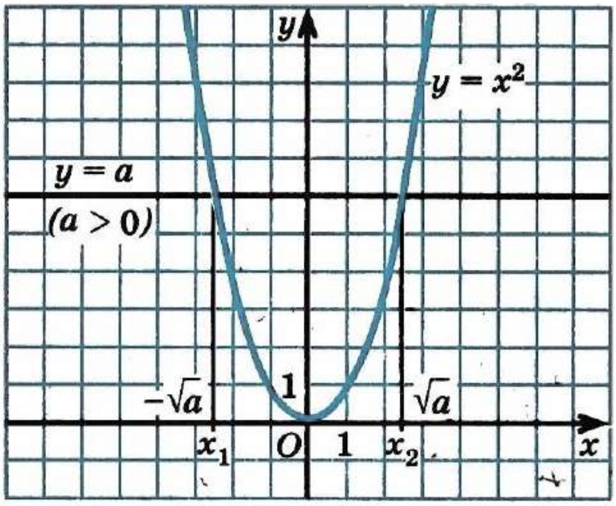
304 Модуль тамгасыннан башка языгыз:

а) $|a^2|$; б) $|a^3|$, биредә $a>0$; в) $|a^3|$, биредә $a<0$.

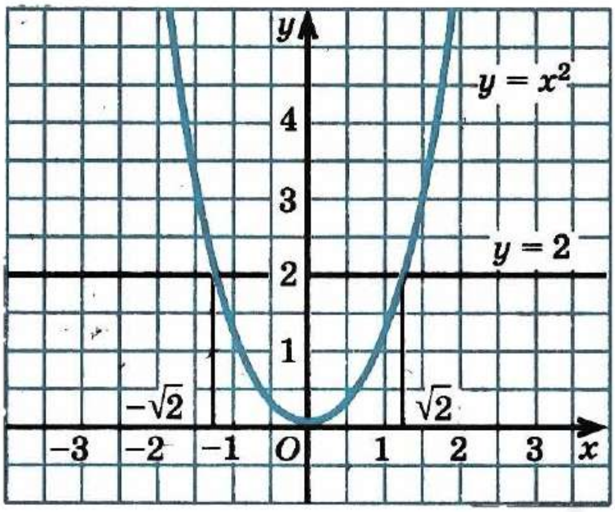
12. $x^2=a$ тигезләмәсе

$x^2=a$ тигезләмәсен карыйк, биредә a — ирекле сан. Бу тигезләмәне чишкәндә a санына бәйле рәвештә өч очрак булырга мөмкин.

$a<0$ булса, $x^2=a$ тигезләмәсенең тамырлары булмый. Дөрестән дә, квадраты тискәре санга тигез булган сан юк.



Рәс. 10



Рәс. 11

a* = 0 *булса, тигезләмәнең нульгә тигез булган бердәнбер тамыры була.

a* > 0 *булса, тигезләмәнең ике тамыры бар. Моңа ышану өчен, $y = x^2$ функциясенең графигын карыйк (рәс. 10). $a > 0$ булганда, $y = a$ турысы $y = x^2$ параболасын ике ноктада кисеп үтә. Кисешү нокталарының абсциссаларын x_1 һәм x_2 дип тамгалыйк. Ул вакытта $x_1^2 = a$ һәм $x_2^2 = a$, димәк, x_1 һәм x_2 саннары $x^2 = a$ тигезләмәсенең тамырлары. x_2 квадраты a га тигез булган уңай сан булганлыктан, x^2 саны a дан арифметик квадрат тамыр була, ягъни $x_2 = \sqrt{a}$. x_1 саны x_2 гә капма-каршы сан булганлыктан, $x_1 = -\sqrt{a}$.

Мәсәлән, $x^2 = 49$ тигезләмәсенең $x_1 = -\sqrt{49}$ һәм $x_2 = \sqrt{49}$ тамырлары бар, ягъни $x_1 = -7$ һәм $x_2 = 7$. $x^2 = 6,25$ тигезләмәсенең тамырлары: $x_1 = -\sqrt{6,25}$ һәм $x_2 = \sqrt{6,25}$, ягъни $x_1 = -2,5$ һәм $x_2 = 2,5$. $x^2 = \frac{4}{9}$ тигезләмәсенең $x_1 = -\sqrt{\frac{4}{9}}$ һәм $x_2 = \sqrt{\frac{4}{9}}$, ягъни $x_1 = -\frac{2}{3}$ һәм $x_2 = \frac{2}{3}$ тамырлары бар.

$x^2 = 2$ тигезләмәсенең $x_1 = -\sqrt{2}$ һәм $x_2 = \sqrt{2}$ тамырлары бар. Бу тамырлар — иррациональ саннар, чөнки квадраты 2 гә тигез булган рациональ сан юк. $y = x^2$ функциясенең графигы ярдәмендә бу тамырларның якынча кыйммәтләрен табу кыен түгел: $\sqrt{2} \approx 1,4$ һәм $-\sqrt{2} \approx -1,4$ (рәс. 11). $x^2 = 3$, $x^2 = 5$, $x^2 = 6,5$ тигезләмәләренең тамырлары тиңдәшле рәвештә $-\sqrt{3}$ һәм $\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$ һәм $\sqrt{5}$, $-\sqrt{6,5}$ һәм $\sqrt{6,5}$ була. Бу тамырлар шулай ук иррациональ саннар.

Теләсә нинди $a \geq 0$ булганда, $x^2 = a$ тигезләмәсенең тискәре булмаган $\sqrt{a}$ тамыры бар; башкача әйткәндә, нинди генә $a \geq 0$ не алсак та, квадраты a га тигез булган тискәре булмаган сан табылыр. Бу

теләсә нинди $a \geq 0$ булганда да, $\sqrt{a}$ аңлатмасының мәгънәсе бар дигәнне аңлата.

Күнегүләр

305 а) $x^2 = 81$; б) $x^2 = 18$; в) $x^2 = 0$; г) $x^2 = -25$ тигезләмәсенең тамырлары бармы?

306 Тигезләмәне чишегез:

а) $x^2 = 36$; в) $x^2 = 121$; д) $x^2 = 8$;
б) $x^2 = 0{,}49$; г) $x^2 = 11$; е) $x^2 = 2{,}5$.

307 Тигезләмәне чишегез һәм $y = x^2$ функциясе графигы ярдәмендә аның тамырларының якынча кыйммәтләрен табыгыз:

а) $x^2 = 3$; б) $x^2 = 5$; в) $x^2 = 4{,}5$; г) $x^2 = 8{,}5$.

308 Тигезләмәне чишегез һәм $y = x^2$ функциясе графигы ярдәмендә аның тамырларының якынча кыйммәтләрен табыгыз:

а) $x^2 = 3{,}6$; б) $x^2 = 2{,}8$; в) $x^2 = 1{,}4$; г) $x^2 = 6$.

309 Тигезләмәне чишегез:

а) $x^2 - 0{,}01 = 0{,}03$; г) $20 - b^2 = -5$; ж) $\frac{1}{2}x^2 = 32$;
б) $80 + y^2 = 81$; д) $3x^2 = 1{,}47$; з) $-5y^2 = 1{,}8$.
в) $19 + c^2 = 10$; е) $\frac{1}{4}a^2 = 10$;

310 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз:

а) $16 + x^2 = 0$; в) $0{,}5^2 = 30$;
б) $0{,}3x^2 = 0{,}027$; г) $-5x^2 = \frac{1}{20}$.

311 Тигезләмәне чишегез:

а) $(x - 3)^2 = 25$; в) $(x - 6)^2 = 7$;
б) $(x + 4)^2 = 9$; г) $(x + 2)^2 = 6$.

312 $x = -3{,}4$; 0; 1,2; 1,6; 2,4 булганда, $\sqrt{8 - 5x}$ аңлатмасының мәгънәсе бармы?

313 Үзгәрешле нинди кыйммәтләргә ия булганда,

а) $3\sqrt{a}$; б) $-5\sqrt{x}$; в) $\sqrt{8c}$; г) $\sqrt{-10b}$ аңлатмасының мәгънәсе бар?

314 Үзгәрешле нинди кыйммәтләргә ия булганда, а) $\sqrt{2x}$; б) $\sqrt{-x}$ аңлатмасының мәгънәсе бар?

315 Саннарның квадратларын табыгыз: $\sqrt{25}; \sqrt{81}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; -\sqrt{4}; \sqrt{5}; -\sqrt{6}; \sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{1{,}3}$.

316 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\left(\sqrt{7}\right)^2$; г) $\left(3\sqrt{5}\right)^2$; ж) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

б) $\left(-\sqrt{26}\right)^2$; д) $0{,}5\left(-\sqrt{8}\right)^2$; з) $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2$.

в) $-2\sqrt{14}\ \sqrt{14}$; е) $\left(-2\sqrt{15}\right)^2$;

317 Исәпләгез:

а) $0{,}49 + 2\left(\sqrt{0{,}4}\right)^2$; в) $\left(2\sqrt{6}\right)^2 + \left(-3\sqrt{2}\right)^2$;

б) $\left(3\sqrt{11}\right)^2 - \sqrt{6400}$; г) $-0{,}1\left(\sqrt{120}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{20}\right)^2$.

318 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $2\sqrt{6}\cdot\left(-\sqrt{6}\right)$; в) $\sqrt{1{,}44} - 2\left(\sqrt{0{,}6}\right)^2$;

б) $-\left(3\sqrt{5}\right)^2$; г) $\left(0{,}1\sqrt{70}\right)^2 + \sqrt{1{,}69}$.

Кабатлау өчен күнегүләр

319 $x = -8; -5; 1; 7; 128$ булганда, $\frac{|x|}{x}$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

а) $x > 0$; б) $x < 0$ булса, $\frac{|x|}{x}$ аңлатмасының кыйммәте күпмегә тигез?

320 Аңлатманың кыйммәтен исәпләгез:

а) $x = -0{,}5$ булганда, $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$ ның;

б) $x = -0{,}4$ булганда, $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}$ның.

321 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\dfrac{8-x^3}{25x^2+100-100x}$; б) $\dfrac{16a^4+16a}{a^2+1-a}$.

322 Бер үк координаталар системасында схематик рәвештә $y = \frac{10}{x}$ һәм $y = 10x$ функцияләренең графикларын сурәтләгез. Бу графикларның уртак нокталары бармы һәм булса, ничә?

13. Квадрат тамырның якынча кыйммәтләрен табу

Практик исәпләүләрдә саннарны еш кына аларның унарлы вакланмаларда белдерелгән якынча кыйммәтләре белән алыштыралар. Арифметик

квадрат тамырның якынча кыйммәтләрен ничек табарга мөмкин икәнен карап үтик.

Мәсәлән, $\sqrt{2}$ ның якынча кыйммәтен өтердән соң өч тамгага кадәр табыйк.

1^2 кечерәк 2 дән, ә 2^2 зуррак 2 дән булганга, $\sqrt{2}$ саны 1 һәм 2 бөтен саннары арасында урнашкан (рәс. 12, *а*). Димәк, $\sqrt{2}$ санының унарлы язылышы болай башлана:

$$\sqrt{2} = 1, \dots .$$

Хәзер унынчы өлеш цифрын табабыз. Моның өчен 1,1; 1,2; 1,3; ... унарлы вакланмаларын икедән зуррак сан чыкканга кадәр квадратка күтәрәбез:

$$1{,}1^2 = 1{,}21,\ 1{,}2^2 = 1{,}44;\ 1{,}3^2 = 1{,}69;$$
$$1{,}4^2 = 1{,}96;\ 1{,}5^2 = 2{,}25$$

була.

$1{,}4^2$ кечерәк 2 дән, ә $1{,}5^2$ зуррак 2 дән, шуңа күрә $\sqrt{2}$ саны 1,4 тән зуррак, ләкин 1,5 тән кечерәк (рәс. 12, *б*). Димәк,

$$\sqrt{2} = 1{,}4 \dots .$$

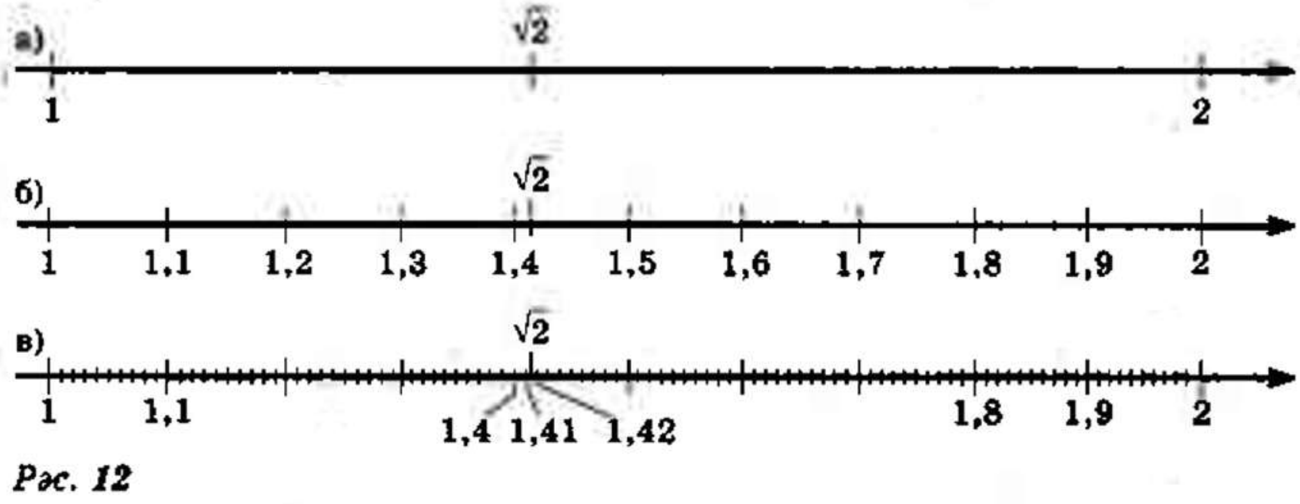
Йөзенче өлешләр цифрын табу өчен, 1,41; 1,42; ... унарлы вакланмаларны эзлекле рәвештә квадратка күтәрербез. $1{,}41^2 = 1{,}9881$, ә $1{,}42^2 = 2{,}0164$ булганга күрә, $\sqrt{2}$ саны 1,41 дән зуррак һәм 1,42 дән кечерәк (рәс. 12, *в*). Димәк,

$$\sqrt{2} = 1{,}41 \dots .$$

Бу процессны дәвам итеп, $\sqrt{2}$ санының унарлы язылышы 1,414... дип башлануын табабыз. Шуңа күрә

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414.$$

Әле карап үткән алым саннан теләсә нинди төгәллек белән арифметик квадрат тамыр алырга



Рәс. 12

мөмкинлек бирә. Практик исәпләүләрдә квадрат тамырларның якынча кыйммәтләрен табу өчен, махсус таблицалар яки исәпләү техникасын кулланалар.

Калькулятор ярдәмендә квадрат тамыр алу өчен, $\sqrt{}$ тамгасы урнаштырылган клавишны файдаланалар. Нинди дә булса саннан тамыр алу өчен, бу санны калькуляторга кертергә һәм аннары $\boxed{\sqrt{}}$ клавишына басарга кирәк. Экранда тамырның кыйммәте яктырыр.

Мисал. $\sqrt{42,5}$ ны табыйк.

▶ Калькуляторга 42,5 санын кертәбез һәм $\sqrt{}$ тамгалы клавишага басабыз. Экранда 6,5192024 саны — $\sqrt{42,5}$ нең якынча кыйммәте күренер. Табылган нәтиҗәне таләп ителгән төгәллектәге тамга калдырып түгәрәклиләр. Мәсәлән, йөзенче өлешләргә кадәр түгәрәкләп табабыз:

$$\sqrt{42,5} \approx 6,52. \triangleleft$$

Күнегүләр

323 Араларында а) $\sqrt{27}$; б) $\sqrt{40}$; в) $\sqrt{120}$; г) $\sqrt{9,2}$; д) $\sqrt{0,4}$ саны чикләнерлек итеп, эзлекле килгән ике бөтен сан сайлап алыгыз.

324 Араларында а) $\sqrt{15}$; б) $\sqrt{80}$; в) $\sqrt{200}$; г) $\sqrt{6,3}$ саны чикләнерлек итеп, эзлекле булган ике бөтен сан сайлап алыгыз.

325 $\sqrt{6}$ иррациональ санының унарлы язылышында берәмлек, унынчы өлеш, йөзенче өлеш разрядларының цифрларын табыгыз.

326 $\sqrt{10}$ санының унарлы язылышында берәмлекләр, унынчы өлеш, йөзенче өлеш разрядларын табыгыз.

327 Калькулятор ярдәмендә

а) $x = 16; 0,25; 3; 245; 0,37$ булганда, $\sqrt{x}$;

б) $x = 8,5; 14,1; 0,2549$ булганда, $\sqrt{x+4}$ аңлатмасының кыйммәтен исәпләгез.

328 Квадратның мәйданы 18 см^2 га тигез. Калькулятор ярдәмендә 0,1 гә кадәр төгәллек белән квадратның ягын табыгыз.

329 Калькуляторда аңлатманың кайсысының кыйммәтен исәпләү уңайлырак:

а) $\sqrt{(a+b)c}$ яки $\sqrt{c(a+b)}$;   б) $a+\sqrt{b}$ яки $\sqrt{b}+a$?

330 Аңлатманы калькуляторда исәпләү өчен уңайлы рәвешкә китерегез һәм аның кыйммәтен табыгыз (җавапны йөзенче өлешкә кадәр түгәрәкләгез):

а) $\sqrt{48{,}5 \cdot 7{,}3 + 39{,}6 \cdot 7{,}3}$; б) $8{,}567 + \sqrt{54}$.

331 Калькулятор ярдәмендә табыгыз (җавапны йөзенче өлешкә кадәр түгәрәкләгез):

а) $6 + \sqrt{17}$; в) $\sqrt{10} + \sqrt{15}$; д) $\sqrt{3{,}4 \cdot 4{,}9}$;

б) $12 - \sqrt{34}$; г) $\sqrt{64} - \sqrt{48}$; е) $6{,}5 + 3\sqrt{7{,}8}$.

332 Калькулятор ярдәмендә исәпләгез (җавапны меңенче өлешкә кадәр түгәрәкләгез):

а) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$; б) $\sqrt{\sqrt{2}}$.

333 Калькулятор ярдәмендә:

а) $a = 4{,}8$ һәм $b = 6{,}2$ булганда, $\sqrt{a^2 + b^2}$;

б) $a = 9{,}7$ һәм $b = 5{,}3$ булганда, $\sqrt{a^2 - b^2}$

аңлатмасының кыйммәтен табыгыз (җавапны йөзенче өлешкә кадәр түгәрәкләгез).

334 Тигезләмәне чишегез һәм калькулятор ярдәмендә аның тамырларының якынча кыйммәтләрен табыгыз (җавапны йөзенче өлешкә кадәр түгәрәкләгез):

а) $x^2 = 30$; в) $(x - 3)^2 = 12$;
б) $7x^2 = 10$; г) $(x + 1)^2 = 8$.

Кабатлау өчен күнегүләр

335 Исәпләгез:

а) $3\sqrt{0{,}16} - 0{,}1\sqrt{225}$; в) $0{,}3\sqrt{1{,}21} \cdot \sqrt{400}$;

б) $0{,}2\sqrt{900} + 1{,}8\sqrt{\frac{1}{9}}$; г) $5 : \sqrt{0{,}25} \cdot \sqrt{0{,}81}$.

336 $y = x^2$ функциясенең графигы
а) $y = -9$; б) $y = 0$; в) $y = 25$; г) $y = 35$
турысын кисеп үтәме? Кисеп үткән очракта кисешү нокталарының координаталарын күрсәтегез.

337 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $10\sqrt{0{,}01} + \left(-\sqrt{2}\right)^2$; б) $0{,}3\sqrt{25} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{12}\right)^2$.

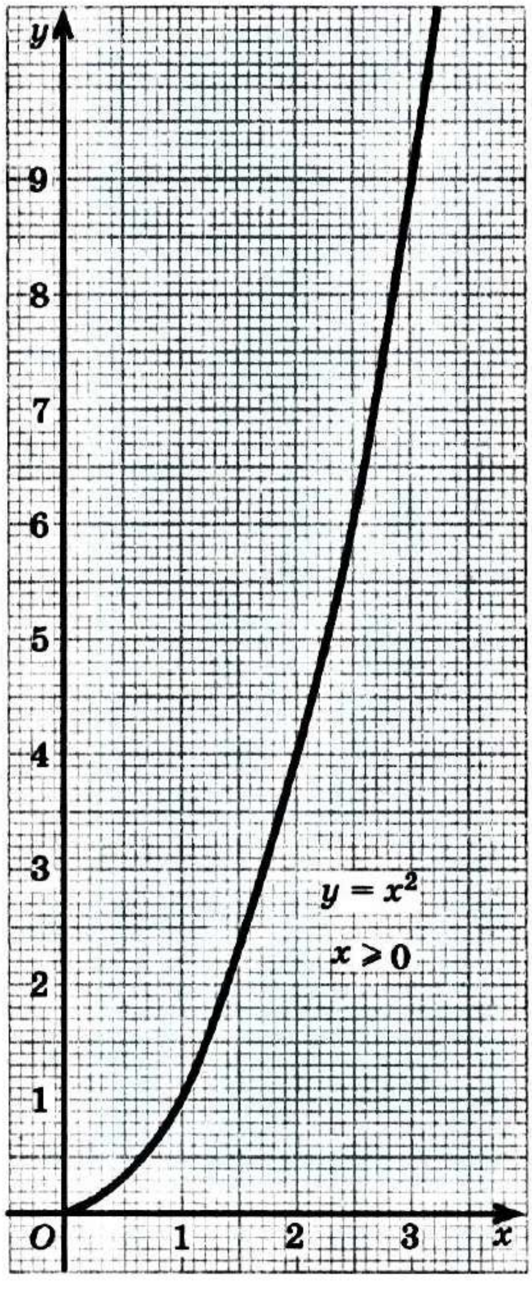
338 $x = 7$; 10; 0; -3; -8 булганда, $x + |x|$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз. а) $x \geq 0$; б) $x < 0$ булганда, $x + |x|$ аңлатмасын гадиләштерегез.

339 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{4a^2-20a+25}{25-4a^2}$; б) $\frac{9x^2+4y^2-12xy}{4y^2-9x^2}$.

14. $y = \sqrt{x}$ функциясе һәм аның графигы

Квадратның ягы a см, ә мәйданы S см^2 булсын. Квадрат ягы a ның һәр кыйммәтенә аның мәйданы S ның бердәнбер кыйммәте туры килә. Квадрат мәйданы S ның аның ягы a га бәйлелеге $S = a^2$ формуласы белән бирелә, биредә $a \geq 0$. Киресенчә, квадрат мәйданы S ның һәр кыйммәте өчен a ягының аңа тиңдәш булган бердәнбер кыйммәтен күрсәтергә мөмкин. Квадрат ягының квадрат мәйданына бәйлелеге $a = \sqrt{S}$ формуласы белән күрсәтелә. $S = a^2$ (биредә $a \geq 0$) һәм $a = \sqrt{S}$ формулалары белән бер үк үзгәрешләр арасындагы функциональ бәйлелекләр бирелә, ләкин беренче очракта квадратның ягы a, ә икенчесендә мәйданы S бәйсез үзгәрешле була.



Рәс. 13

Әгәр һәр очракта да бәйсез үзгәрешлене x хәрефе, ә бәйле үзгәрешлене y хәрефе белән тамгаласак, $y = x^2$ (биредә $x \geq 0$) һәм $y = \sqrt{x}$ формулаларын табарбыз.

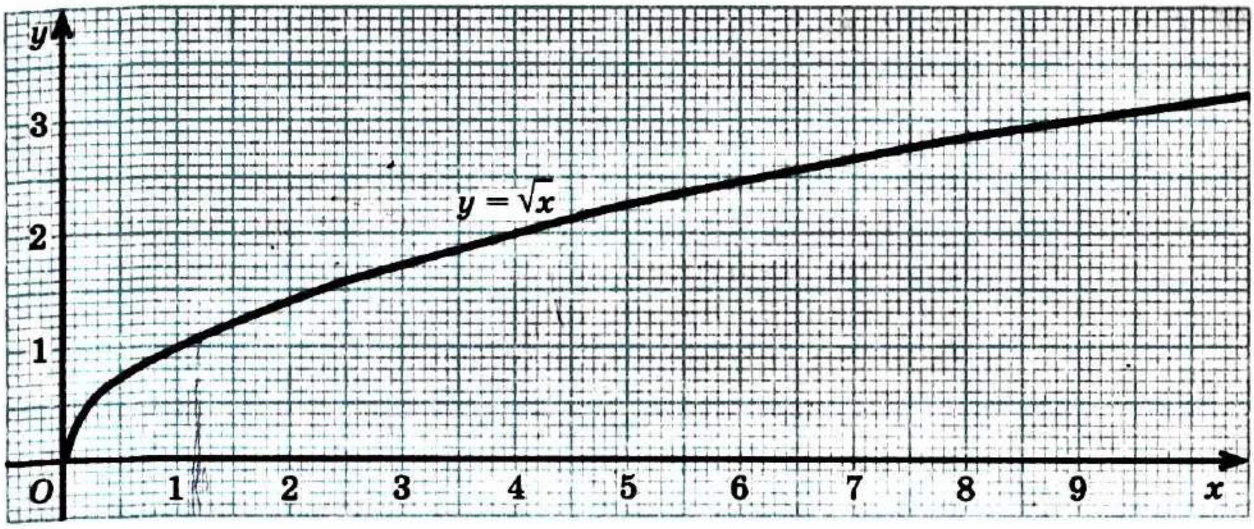
Без $y = x^2$ (биредә $x \geq 0$) функциясенең графигы параболаның бер кисәге — аның уң тармагы булуын беләбез (рәс. 13). Хәзер $y = \sqrt{x}$ функциясенең графигын төзик.

$x \geq 0$ булганда, $\sqrt{x}$ аңлатмасының мәгънәсе бар, шуңа күрә тискәре булмаган саннар күплеге $y = \sqrt{x}$ функциясенең билгеләнү өлкәсе була.

$y = \sqrt{x}$ функциясенең кыйммәтләре таблицасын төзик (бөтен саннарның квадраты булмаган x өчен y ның якынча кыйммәтләрен калькулятор ярдәмендә табарга була):

x	0	0,5	1	2	3	4
y	0	0,7	1	1,4	1,7	2

x	5	6	7	8	9
y	2,2	2,4	2,6	2,8	3



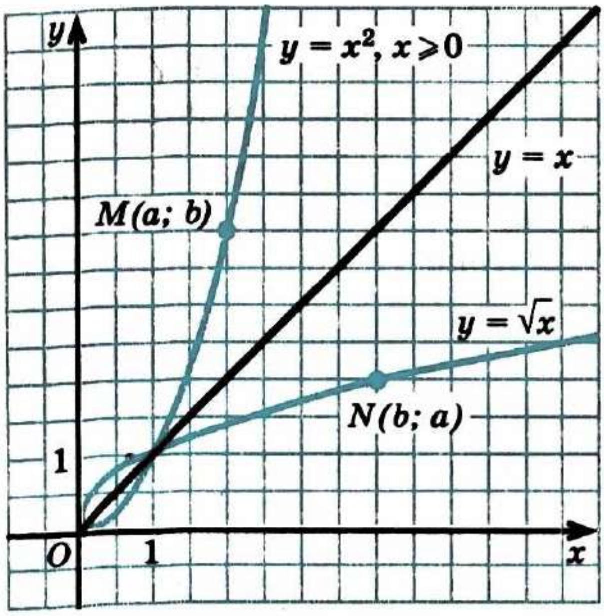
Рәс. 14

Координаталар яссылыгында координаталары таблицада бирелгән нокталарны төзик. Координаталар башлангычыннан бу нокталар аша салмак сызык үткәреп, $y = \sqrt{x}$ функциясенең графигын табарбыз (рәс. 14).

$y = \sqrt{x}$ функциясенең кайбер үзлекләрен әйтеп бирик.

1. **Әгәр $x = 0$ икән, $y = 0$ була,** шуңа күрә координаталар башлангычы функция графигыныкы була.
2. **Әгәр $x > 0$ икән, $y > 0$ була;** график беренче координаталар чирегендә урнаша.
3. **Аргументның зуррак кыйммәтенә функциянең зуррак кыйммәте тиңдәш була;** функциянең графигы өскә таба китә.

Мәсәлән, $\sqrt{2,6} > \sqrt{1,5}$, $\sqrt{6} > \sqrt{3}$.



Рәс. 15

$y = \sqrt{x}$ функциясенең графигы, биредә $x \geq 0$, $y = x^2$ функциясе графигы кебек үк, параболаның бер тармагы була. Бу хәл әлеге графиклар $y = x$ турысына карата симметрик булудан чыга (рәс. 15). Графикларның симметриялелеген исбатлау $(a; b)$ һәм $(b; a)$ координаталы нокталарның $y = x$ турысына карата симметрияле булуларына нигезләнгән.

M $(a; b)$ ноктасы $y = x^2$ (биредә $x \geq 0$) графигыныкы булсын. Ул вакытта $b = a^2$ тигезлеге дөрес була. Шарт буенча a — тискәре булмаган сан, шуңа күрә $a = \sqrt{b}$.

Димәк, N $(b;\ a)$ ноктасының координаталарын $y=\sqrt{x}$ формуласына куйганда дөрес тигезлек килеп чыга, ягъни N $(b;\ a)$ ноктасы $y=\sqrt{x}$ функциясе графигыныкы була.

Киресе дә дөрес: әгәр нинди дә булса нокта икенче графикныкы булса, координаталары шул ук саннар, ләкин кире тәртиптә алынган нокта беренче графикныкы була.

Шулай итеп, $y=x^2$ (биредә $x \geq 0$) функциясе графигының һәр $M(a;\ b)$ ноктасына $y=\sqrt{x}$ функциясе графигының N $(b;\ a)$ ноктасы тиңдәш була, һәм киресенчә, M $(a;\ b)$ һәм N $(b;\ a)$ нокталары $y=x$ турысына карата симметрик булганлыктан, графиклар үзләре дә ул турыга карата симметрик булалар. ○

Күнегүләр

340 Түгәрәк мәйданын $S=\pi r^2$ (биредә r — түгәрәкнең радиусы) формуласы буенча, яки $S=\frac{\pi d^2}{4}$ (биредә d — түгәрәкнең диаметры) формуласы буенча исәпләргә мөмкин.
а) r ның S ка; б) d ның S ка бәйлелеген формула рәвешендә күрсәтегез.

341 а) Куб өслеге мәйданы S ның кабыргасы озынлыгы a га; б) кубның кабыргасы озынлыгы a ның өслек мәйданы S ка бәйлелеген формула рәвешендә күрсәтегез.

342 R радиуслы шар өслеге $S=\pi R^2$ (биредә R — шар радиусы) формуласы буенча исәпләнә. R ның S ка бәйлелеген формула аша күрсәтегез.

343 $y=\sqrt{x}$ функциясенең графигыннан файдаланып табыгыз:
а) $x=2{,}5;\ 5{,}5;\ 8{,}4$ булганда, $\sqrt{x}$ ның кыйммәтен;
б) $\sqrt{x}=1{,}2;\ 1{,}7;\ 2{,}5$ кә тиңдәш булган x кыйммәтен.

344 $y=\sqrt{x}$ функциясе графигы ярдәмендә табыгыз:
а) $x=0{,}5;\ 1{,}5;\ 6{,}5;\ 7{,}2$ булганда, функциянең кыйммәтен;
б) $y=0{,}5;\ 1{,}5;\ 1{,}8;\ 2{,}3$ кыйммәтенә тиңдәш булган аргумент кыйммәтен.

345 A (64; 8); B (10 000; 100); C (−81; 9); D (25; −5) нокталары $y=\sqrt{x}$ функциясе графигында ятамы?

346 а) $y=1$; б) $y=10$; в) $y=100$; г) $y=-100$ турысы $y=\sqrt{x}$ функциясенең графигын кисеп үтәме? Әгәр киссә, нинди ноктада кисеп үтә?

347 M (121; 11); N (900; 30); A (−400; 20); E (81; −9) нокталары $y=\sqrt{x}$ функциясе графигында ятамы?

348 $y = \sqrt{x}$ функциясенең графигы ярдәмендә түбәндәге саннарны чагыштырыгыз:

а) $\sqrt{0,5}$ һәм $\sqrt{0,8}$; б) $\sqrt{4,2}$ һәм $\sqrt{5,7}$; в) $\sqrt{7}$ һәм $\sqrt{8}$.

349 Кайсысы зуррак:

а) $\sqrt{10}$ яки $\sqrt{11}$; г) 7 яки $\sqrt{50}$;

б) $\sqrt{0,12}$ яки $\sqrt{0,15}$; д) $\sqrt{60}$ яки 8;

в) $\sqrt{50}$ яки $\sqrt{60}$; е) $\sqrt{2}$ яки 1,4?

350 Саннарны чагыштырыгыз:

а) $\sqrt{27}$ һәм $\sqrt{28}$; в) $\sqrt{7}$ һәм 3; д) $\sqrt{\frac{1}{5}}$ һәм $\sqrt{\frac{1}{6}}$.

б) $\sqrt{1,3}$ һәм $\sqrt{1,5}$; г) $\sqrt{6,25}$ һәм 2,5;

351 Саннарны үсә бару тәртибендә языгыз:

а) $\sqrt{2,3}$, $\sqrt{10,4}$ һәм $\sqrt{19,5}$; в) 0,5, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ һәм $\sqrt{\frac{1}{3}}$;

б) $\sqrt{18}$, $\sqrt{12}$ һәм 4; г) $\sqrt{0,7}$, $\sqrt{1,7}$ һәм 1.

Кабатлау өчен күнегүләр

352 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $0,5\sqrt{121}+3\sqrt{0,81}$; в) $\sqrt{400}-\left(4\sqrt{0,5}\right)^2$;

б) $\sqrt{144}\cdot\sqrt{900}\cdot\sqrt{0,01}$; г) $\left(-3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2-10\sqrt{0,64}$.

353 а) $\sqrt{(-9)^2}$; б) $\left(\sqrt{-9}\right)^2$; в) $-\sqrt{9^2}$; г) $-\sqrt{(-9)^2}$

аңлатмасының мәгънәсе бармы?

354 а) $x^2 = 11$ һәм $\sqrt{x} = 11$; б) $2x^2 = \frac{1}{2}$ һәм $2\sqrt{x} = \frac{1}{2}$

тигезләмәләрен чишегез.

355 а) $a > 0$ һәм $b > 0$; в) $a < 0$ һәм $b > 0$;

б) $a < 0$ һәм $b < 0$; г) $a > 0$ һәм $b < 0$

булса, $|ab^3|$ ны гадиләштерегез.

356 Вакланманың кыйммәтен нуль белән чагыштырыгыз:

а) $\frac{-5x}{x^2+7}$, биредә $x < 0$; б) $\frac{x+4}{-x^2-4}$, биредә $x > 0$.

Контроль сораулар

1 Арифметик квадрат тамыр билгеләмәсен әйтегез. a ның нинди кыйммәтләре өчен $\sqrt{a}$ аңлатмасының мәгънәсе бар?

2 $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$ булганда, $x^2 = a$ тигезләмәсенең тамырлары бармы һәм булса, ничә тамыры бар?

3 Калькулятор ярдәмендә ничек квадрат тамыр алырга икәнен мисал белән күрсәтегез.

4 $y = \sqrt{x}$ функциясенең билгеләнү өлкәсе нинди? Бу функциянең графигы координаталар яссылыгында ничек урнашкан?

§ 6. Арифметик квадрат тамырның үзлекләре

15. Тапкырчыгыш һәм вакланмадан квадрат тамыр

$\sqrt{81\cdot 4}$ һәм $\sqrt{81}\cdot\sqrt{4}$ аңлатмаларының кыйммәтләрен чагыштырыйк:

$$\sqrt{81\cdot 4}=\sqrt{324}=18,$$
$$\sqrt{81}\cdot\sqrt{4}=9\cdot 2=18.$$

Без $\sqrt{81\cdot 4}=\sqrt{81}\cdot\sqrt{4}$ икәнен күрәбез. Тискәре булмаган теләсә нинди ике санның тапкырчыгышыннан тамыр да шундый ук үзлеккә ия.

Теорема 1.

Әгәр $a\geq 0$ һәм $b\geq 0$ булса, $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ була.

● $a\geq 0$ һәм $b\geq 0$ булсын. Ул вакытта $\sqrt{ab}$ һәм $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ аңлатмаларының һәркайсының мәгънәсе бар.

$$1)\ \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\geq 0;\qquad 2)\ (\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=ab$$

шартларының үтәлүен күрсәтик.

$\sqrt{a}$ һәм $\sqrt{b}$ аңлатмалары бары тик тискәре булмаган кыйммәтләр генә алганлыктан, $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ тапкырчыгышы тискәре түгел.

Дәрәҗәнең тапкырчыгыш үзлеген кулланып табабыз:

$$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=ab.$$

Без 1) һәм 2) шартларының үтәлүен күрсәттек. Димәк, арифметик квадрат тамыр билгеләмәсе буенча a һәм b ның тискәре булмаган теләсә нинди кыйммәтләре өчен түбәндәге тигезлек дөрес:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.\ \bigcirc$$

Исбатланган теорема тамыр тамгасы астында тапкырлаучылар саны икедән артык булган очрак өчен дә дөрес.

Мәсәлән, әгәр $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$ икән, $\sqrt{abc}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}$. Дөрестән дә, $\sqrt{abc}=\sqrt{(ab)c}=\sqrt{ab}\cdot\sqrt{c}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}$.

Шулай итеп, арифметик квадрат тамыр түбәндәге үзлеккә ия:

тискәре булмаган тапкырлаучыларның тапкырчыгышыннан тамыр бу тапкырлаучыларның тамырлары тапкырчыгышына тигез.

Хәзер вакланмадан арифметик квадрат тамырны карыйк.

Теорема 2.

Әгәр $a \geq 0$ һәм $b > 0$ булса, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ була.

● $a \geq 0$ һәм $b > 0$ булганда, $\sqrt{\frac{a}{b}}$ һәм $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ аңлатмаларының һәркайсының мәгънәсе була. Теорема 1 дәге кебек ук исбатлау өчен

$$1)\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0 \text{ һәм } 2)\ \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$$

шартлары үтәлүен күрсәтү җитә.

$a > 0$ һәм $b > 0$ булганга күрә, $\sqrt{a} \geq 0$ һәм $\sqrt{b} > 0$, шуңа күрә $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0$.

Вакланманың дәрәҗәсе үзлегеннән файдаланып табабыз:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Димәк, арифметик квадрат тамыр билгеләмәсе буенча, теләсә нинди $a \geq 0$ һәм $b > 0$ өчен

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}. \ ○$$

Шулай итеп, без арифметик квадрат тамырның тагын бер үзлеген исбатладык:

санаучысы — тискәре булмаган сан, ә ваклаучысы уңай сан булган вакланмадан тамыр табу өчен, санаучыдан тамырны ваклаучыдан тамырга бүләргә кирәк.

1 нче мисал. $\sqrt{64 \cdot 0,04}$ аңлатмасының кыйммәтен табыйк.

▶ Тапкырчыгыштан тамыр турындагы теоремадан файдаланабыз:

$$\sqrt{64 \cdot 0,04} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{0,04} = 8 \cdot 0,2 = 1,6. \ ◁$$

2 нче мисал. $\sqrt{32 \cdot 68}$ аңлатмасының кыйммәтен исәплик.

▶ Тамырасты аңлатмасын һәркайсы бөтен санның квадраты булган тапкырлаучыларның тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтәбез һәм тапкырчыгыштан тамыр турындагы теореманы кулланабыз:

$$\sqrt{32 \cdot 68} = \sqrt{(16 \cdot 2) \cdot (49 \cdot 2)} =$$

$$= \sqrt{16 \cdot 49 \cdot 4} = 4 \cdot 7 \cdot 2 = 56. \ ◁$$

3 нче мисал. $\sqrt{\frac{36}{169}}$ аңлатмасының кыйммәтен табыйк.

▶ Вакланмадан тамыр турындагы теорема буенча

$$\sqrt{\frac{36}{169}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{169}}=\frac{6}{13}.$$ ◁

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ һәм $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ бердәйлекләрендә аларның сул һәм уң кисәкләренең урыннарын алыштырып табабыз:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab} \text{ һәм } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Арифметик квадрат тамырларны тапкырлаганда һәм бүлгәндә бу бердәйлекләрне кулланалар.

4 нче мисал. $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$ тапкырчыгышының кыйммәтен табыйк.

▶ Табабыз: $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{20\cdot 5}=\sqrt{100}=10$. ◁

5 нче мисал. $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$ өлешенең кыйммәтен табыйк.

▶ Табабыз: $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{80}{5}}=\sqrt{16}=4$. ◁

Күнегүләр

357 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{100\cdot 49}$; в) $\sqrt{64\cdot 121}$; д) $\sqrt{0,01\cdot 169}$;

б) $\sqrt{81\cdot 400}$; г) $\sqrt{144\cdot 0,25}$; е) $\sqrt{2,25\cdot 0,04}$.

358 Тамырның кыйммәтен исәпләгез:

а) $\sqrt{\frac{9}{64}}$; в) $\sqrt{\frac{121}{25}}$; д) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; ж) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$;

б) $\sqrt{\frac{36}{25}}$; г) $\sqrt{\frac{144}{169}}$; е) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$; з) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$.

359 Тамырның кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{81\cdot 900}$; б) $\sqrt{0,36\cdot 49}$; в) $\sqrt{12\frac{1}{4}}$; г) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$.

360. Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{9\cdot 64\cdot 0,25}$; г) $\sqrt{\frac{25}{81}\cdot\frac{16}{49}\cdot\frac{196}{9}}$;

б) $\sqrt{0,36\cdot 2,25\cdot 144}$; д) $\sqrt{3\frac{1}{16}\cdot 2\frac{14}{25}}$;

в) $\sqrt{1,21\cdot 0,09\cdot 0,0001}$; е) $\sqrt{5\frac{1}{16}\cdot 2\frac{34}{81}}$.

361 Тамырның кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{0,04\cdot 81\cdot 25}$; в) $\sqrt{1\frac{7}{9}\cdot\frac{4}{25}}$;

б) $\sqrt{0,09\cdot 16\cdot 0,04}$; г) $\sqrt{\frac{121}{144}\cdot 2\frac{1}{4}}$.

362 Тамырның кыйммәтен исәпләгез:

а) $\sqrt{810\cdot 40}$; г) $\sqrt{8\cdot 98}$; ж) $\sqrt{90\cdot 6,4}$;

б) $\sqrt{10\cdot 250}$; д) $\sqrt{50\cdot 18}$; з) $\sqrt{16,9\cdot 0,4}$.

в) $\sqrt{72\cdot 32}$; е) $\sqrt{2,5\cdot 14,4}$;

363 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{75\cdot 48}$; б) $\sqrt{45\cdot 80}$; в) $\sqrt{4,9\cdot 360}$; г) $\sqrt{160\cdot 6,4}$.

364 Аңлатманың кыйммәтен исәпләгез:

а) $\sqrt{13^2-12^2}$; в) $\sqrt{313^2-312^2}$; д) $\sqrt{45,8^2-44,2^2}$;

б) $\sqrt{8^2+6^2}$; г) $\sqrt{122^2-22^2}$; е) $\sqrt{21,8^2-18,2^2}$.

365 Тамыр алыгыз:

а) $\sqrt{17^2-8^2}$; в) $\sqrt{82^2-18^2}$; д) $\sqrt{6,8^2-3,2^2}$;

б) $\sqrt{3^2+4^2}$; г) $\sqrt{117^2-108^2}$; е) $\sqrt{\left(1\frac{1}{16}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$.

366 Аңлатманы тамырларның тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтегез:

а) $\sqrt{15}$; б) $\sqrt{21}$; в) $\sqrt{7a}$; г) $\sqrt{3c}$.

367 Аңлатманы тамырларның өлеше рәвешендә күрсәтегез:

а) $\sqrt{\frac{2}{7}}$; б) $\sqrt{\frac{3}{10}}$; в) $\sqrt{\frac{5}{a}}$; г) $\sqrt{\frac{b}{3}}$.

368 а) $10\sqrt{\frac{n}{100}}=\sqrt{n}$; б) $\sqrt{n}=\frac{1}{10}\sqrt{100n}$

икәнен исбатлагыз.

369 $\sqrt{75}\approx 8,7$ якынча тигезлегеннән файдаланып, аңлатманың якынча кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{7500}$; б) $\sqrt{750\,000}$; в) $\sqrt{0,75}$; г) $\sqrt{0,0075}$.

370 Квадрат тамырның үзлекләреннән файдаланып, дәреслекнең форзацында бирелгән квадратлар таблицасы ярдәмендә аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{57\,600}$; г) $\sqrt{129\,600}$; ж) $\sqrt{0,0484}$;

б) $\sqrt{230\,400}$; д) $\sqrt{20,25}$; з) $\sqrt{0,3364}$.

в) $\sqrt{152\,100}$; е) $\sqrt{9,61}$;

371 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{44\,100}$; б) $\sqrt{435\,600}$; в) $\sqrt{0,0729}$; г) $\sqrt{15,21}$.

372 Тапкырчыгышның кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$; г) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$; ж) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{4,5}$;

б) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$; д) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}$; з) $\sqrt{1,2}\cdot\sqrt{3\frac{1}{3}}$.

в) $\sqrt{28}\cdot\sqrt{7}$; е) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{7}$;

373 Өлешнең кыйммәтен табыгыз:

а) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; б) $\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{2300}}$; в) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$; г) $\frac{\sqrt{12\,500}}{\sqrt{500}}$; д) $\frac{\sqrt{7,5}}{\sqrt{0,3}}$.

374 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{40}$; г) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}$; ж) $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$;

б) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$; д) $\sqrt{110}\cdot\sqrt{4,4}$; з) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$.

в) $\sqrt{162}\cdot\sqrt{2}$; е) $\sqrt{1\frac{4}{5}}\cdot\sqrt{0,2}$;

375 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ аңлатмасының кыйммәтен калькулятор ярдәмендә ике юл белән исәпләргә мөмкин: $\sqrt{2}$ һәм $\sqrt{3}$ нең кыйммәтләрен табарга һәм нәтиҗәләрне тапкырларга яки $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ тапкырчыгышын $\sqrt{6}$ аңлатмасы белән алыштырырга һәм аннары аның кыйммәтен табарга була. Бу ысулларның кайсысын куллану уңайлырак? Исәпләүләрне эшләгез.

376 Калькулятор ярдәмендә аңлатманың якынча кыйммәтен өтердән соң ике урынга кадәр табыгыз:

а) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}$; в) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{11}\cdot\sqrt{12}$; д) $\frac{\sqrt{10,2}}{\sqrt{38,6}}$;

б) $\sqrt{3,1}\cdot\sqrt{4,5}$; г) $\frac{\sqrt{117}}{\sqrt{6}}$; е) $\frac{\sqrt{2,3}\cdot\sqrt{8,1}}{\sqrt{4,5}}$.

Кабатлау өчен күнегүләр

377 $x = -4;\ -3;\ 0;\ 9;\ 20$ булса, $\sqrt{x^2}$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз. x ның нинди кыйммәтләре өчен $\sqrt{x^2}$ аңлатмасының мәгънәсе бар?

378 Модульнең билгеләмәсеннән файдаланып,

а) $x \geq 0$; б) $x < 0$

икәне билгеле булганда, $x\cdot|x|$ аңлатмасын гадиләштерегез.

379 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $2a^2\cdot\frac{1}{8}a^3$; б) $4(3a^4)^2$; в) $20a^4\cdot\left(\frac{1}{2}a^3\right)^2$.

380 Ниндидер аңлатманың квадраты рәвешендә күрсәтегез:

а) a^4; б) a^6; в) a^{18}; г) $\frac{1}{a^{10}}$; д) a^2b^8; е) $\frac{a^6}{b^{12}}$.

381 Турыпочмаклы параллелепипедның нигезендә ягы a см булган квадрат ята, параллелепипедның биеклеге b см га, ә аның күләме V $см^3$ га тигез. a үзгәрешлесен b һәм V аша күрсәтегез.

382 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{1-10a+25a^2}{5a-1}$; б) $\frac{1-6x+9x^2}{3x-1}$.

383 Тигезләмәне чишегез:

а) $\frac{2x}{5}-\frac{x+18}{6}=23+\frac{x}{30}$; б) $\frac{x-1}{3}+\frac{2x+1}{5}=\frac{3x-1}{4}$.

16. Дәрәҗәдән квадрат тамыр

$x=5$ һәм $x=-6$ булганда, $\sqrt{x^2}$ аңлатмасының кыйммәтләрен табабыз:

$$\sqrt{5^2}=\sqrt{25}=5, \quad \sqrt{(-6)^2}=\sqrt{36}=6.$$

Карап үткән мисалларның һәркайсында санның квадратыннан тамыр бу санның модуленә тигез:

$$\sqrt{5^2}=|5|, \quad \sqrt{(-6)^2}=|-6|.$$

Теорема

x ның теләсә нинди кыйммәте өчен

$$\sqrt{x^2}=|x| \qquad (1)$$

тигезлеге дөрес.

$x\geq 0$ һәм $x<0$ очракларын карыйк. Әгәр $x\geq 0$ булса, арифметик квадрат тамыр билгеләмәсе буенча $\sqrt{x^2}=x$. Әгәр $x<0$ икән, $-x>0$ була, шуңа күрә $\sqrt{x^2}=-x$. $x\geq 0$ булса, без $|x|=x$ икәнен, әгәр $x<0$ булса, $|x|=-x$ булуын беләбез. Димәк, теләсә нинди x өчен $\sqrt{x^2}$ аңлатмасының кыйммәте $|x|$ аңлатмасының кыйммәте белән тәңгәл килә.

(1) бердәйлеге җөп күрсәткечле дәрәҗәдән тамыр алганда кулланыла. *Җөп күрсәткечле дәрәҗәдән тамыр алу өчен, тамырасты аңлатмасын ниндидер аңлатманың квадраты рәвешендә күрсәтү һәм (1) бердәйлегеннән файдалану җитә.*

1 нче мисал. $\sqrt{a^{16}}$ аңлатмасын гадиләштерик.

a^{16} дәрәҗәсен $(a^8)^2$ рәвешендә күрсәтәбез һәм (1) бердәйлегеннән файдаланабыз:

$$\sqrt{a^{16}}=\sqrt{(a^8)^2}=|a^8|.$$

Теләсә нинди a өчен $a^8 \geq 0$ булганлыктан, $|a^8| = a^8$. Шулай итеп,

$$\sqrt{a^{16}} = a^8. \triangleleft$$

2 нче мисал. $\sqrt{x^{10}}$ (биредә $x < 0$) аңлатмасының рәвешен үзгәртик.

▶ x^{10} ны $(x^5)^2$ рәвешендә күрсәтеп табабыз:

$$\sqrt{x^{10}} = \sqrt{(x^5)^2} = |x^5|.$$

$x < 0$ булганга, $x^5 < 0$, шуңа күрә $|x^5| = -x^5$. Димәк, $x < 0$ булганда,

$$\sqrt{x^{10}} = -x^5. \triangleleft$$

3 нче мисал. $\sqrt{893\,025}$ аңлатмасының кыйммәтен табабыз.

▶ 893 025 санын гади тапкырлаучылар тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтеп табабыз:

$$\sqrt{893\,025} = \sqrt{3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = \sqrt{3^6} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7^2} =$$

$$= \sqrt{(3^3)^2} \cdot 5 \cdot 7 = 3^3 \cdot 35 = 27 \cdot 35 = 945. \triangleleft$$

Күнегүләр

384 Исәпләгез:

а) $\sqrt{(0,1)^2}$; г) $\sqrt{(1,7)^2}$; ж) $2\sqrt{(-23)^2}$;

б) $\sqrt{(-0,4)^2}$; д) $\sqrt{(-19)^2}$; з) $5\sqrt{52^2}$;

в) $\sqrt{(-0,8)^2}$; е) $\sqrt{24^2}$; и) $0,2\sqrt{(-61)^2}$.

385 а) $x = 22, -35; -1\frac{2}{3}$; 0 булганда, $\sqrt{x^2}$;

б) $a = -7$; 12 булганда, $2\sqrt{a^2}$;

в) $y = -15$; 27 булганда, $0,1\sqrt{y^2}$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

386 Аңлатманы бердәй тигез аңлатма белән алыштырыгыз:

а) $\sqrt{p^2}$; б) $\sqrt{y^2}$; в) $3\sqrt{b^2}$; г) $-0,2\sqrt{x^2}$; д) $\sqrt{25a^2}$.

387 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $a > 0$ булса, $\sqrt{a^2}$ ны; д) $x \leq 0$ булса, $\sqrt{36x^2}$ ны;

б) $n < 0$ булса, $\sqrt{n^2}$ ны; е) $y < 0$ булса, $-\sqrt{9y^2}$ ны;

в) $c \geq 0$ булса, $3\sqrt{c^2}$ ны; ж) $x \geq 0$ булса, $-5\sqrt{4x^2}$ ны;

г) $y > 0$ булса, $-5\sqrt{y^2}$ ны; з) $a < 0$ булса, $0,5\sqrt{16a^2}$ ны.

388 Гадиләштерегез:

а) $m \geq 0$ булса, $2\sqrt{m^2}$ ны; в) $x \leq 0$ булса, $\sqrt{0,64x^2}$ ны;

б) $a > 0$ булса, $-3\sqrt{a^2}$ ны; г) $y < 0$ булса, $-\sqrt{0,25y^2}$ ны.

389 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\sqrt{y^2}$, биредә $y \geq 0$; г) $5\sqrt{a^8}$;

б) $\sqrt{m^4}$; д) $\frac{1}{3}\sqrt{c^{12}}$;

в) $\sqrt{x^6}$, биредә $x < 0$; е) $1{,}5\sqrt{t^{14}}$, биредә $t < 0$.

390 Аңлатманың рәвешен үзгәртегез:

а) $\sqrt{0,49x^{18}}$, биредә $x < 0$; в) $15\sqrt{0,16c^{12}}$;

б) $\sqrt{0,01a^{26}}$, биредә $a \geq 0$; г) $0{,}8\sqrt{100y^{16}}$.

391 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\sqrt{p^{10}}$ ны, $p > 0$ булса; г) $15\sqrt{b^{16}}$;

б) $\sqrt{x^{18}}$ ны, $x < 0$ булса; д) $1{,}6\sqrt{x^8}$;

в) $\sqrt{y^{12}}$; е) $0{,}1\sqrt{a^6}$ ны, $a < 0$ булса.

392 Тамырның кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{2^4}$; в) $\sqrt{2^6}$; д) $\sqrt{(-5)^4}$; ж) $\sqrt{3^4 \cdot 5^2}$;

б) $\sqrt{3^4}$; г) $\sqrt{10^8}$; е) $\sqrt{(-2)^8}$; з) $\sqrt{2^6 \cdot 7^4}$.

393 Исәпләгез:

а) $\sqrt{11^4}$; в) $\sqrt{(-3)^8}$; д) $\sqrt{2^8 \cdot 3^2}$; ж) $\sqrt{7^2 \cdot 2^8}$;

б) $\sqrt{4^6}$; г) $\sqrt{(-6)^4}$; е) $\sqrt{3^4 \cdot 5^6}$; з) $\sqrt{3^6 \cdot 5^4}$.

394 Тамырасты аңлатмасын гади тапкырлаучыларның тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтеп тамыр алыгыз:

а) $\sqrt{20736}$; в) $\sqrt{28224}$;

б) $\sqrt{50625}$; г) $\sqrt{680625}$.

395 Исәпләгез:

а) $\sqrt{2304}$; б) $\sqrt{18225}$; в) $\sqrt{254016}$.

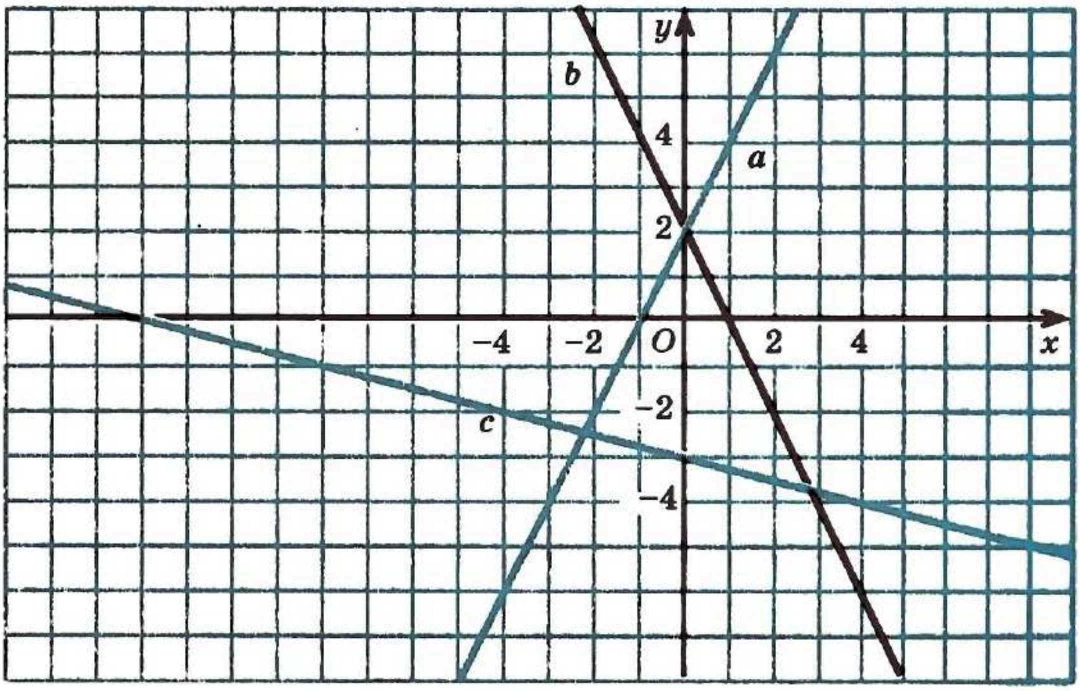
Кабатлау өчен күнегүләр

396 Саннарны чагыштырыгыз:

а) 7 һәм $\sqrt{50}$; в) $\sqrt{6}$ һәм 2,4;

б) $\sqrt{11}$ һәм 3; г) 2,1 һәм $\sqrt{4,21}$.

397 $\left(\frac{5}{a+1} - \frac{3}{a-1} + \frac{6}{a^2-1}\right) \cdot \frac{a+1}{2}$ аңлатмасының кыйммәте a га бәйле түгел икәнлеген исбатлагыз.



Рәс. 16

398 $\left(\frac{x+5}{x^2-5x}-\frac{x}{x^2-25}\right)\cdot\frac{x^2-25}{5}$ **аңлатмасын гадиләштерегез.**

399 **16 нчы рәсемдә $y=2x+2$, $y=-\frac{x}{4}-3$ һәм $y=-2x+2$ функцияләренең графиклары сурәтләнгән, һәр функция өчен аның графигын күрсәтегез.**

400 **Цилиндрның күләме $V=\pi R^2H$ формуласы белән исәпләнә, биредә R — нигезенең радиусы, H — цилиндрның биеклеге. R үзгәрешлесен V һәм H аша күрсәтегез.**

Контроль сораулар

1. **Тапкырчыгыштан квадрат тамыр турындагы теореманы әйтеп бирегез һәм исбатлагыз.**
2. **Вакланмадан квадрат тамыр турындагы теореманы әйтеп бирегез һәм исбатлагыз.**
3. $\sqrt{x^2}=|x|$ **бердәйлеген исбатлагыз.**
4. $\sqrt{a^{12}}$ **аңлатмасы мисалы ярдәмендә җөп күрсәткечле дәрәҗәдән ничек тамыр алынуын күрсәтегез.**

§ 7. Арифметик квадрат тамырның үзлекләрен куллану

17. Тапкырлаучыны тамыр тамгасы тышына чыгару. Тапкырлаучыны тамыр тамгасы астына кертү

$\sqrt{50}$ һәм $6\sqrt{2}$ аңлатмаларының кыйммәтләрен чагыштырыйк. Бу мәсьәләне $\sqrt{50}$ ның рәвешен үзгәртеп эшләп була. 50 санын $25 \cdot 2$ тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтәбез һәм тапкырчыгыштан тамыр турындагы теореманы кулланып табабыз:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

$5\sqrt{2} < 6\sqrt{2}$, шуңа күрә $\sqrt{50} < 6\sqrt{2}$.

Мәсьәләне чишкәндә, без $\sqrt{50}$ ны 5 һәм $\sqrt{2}$ саннарының тапкырчыгышы белән алыштырдык. Мондый рәвешүзгәртүне *тапкырлаучыны тамыр тамгасы тышына чыгару* дип атыйлар.

$6\sqrt{2}$ тапкырчыгышын арифметик квадрат тамыр рәвешендә күрсәтеп, $\sqrt{50}$ һәм $6\sqrt{2}$ аңлатмаларының кыйммәтләрен башкача да чагыштырырга була. Моның өчен 6 санын $\sqrt{36}$ дип алыштырабыз һәм тамырларны тапкырлап табабыз:

$$6\sqrt{2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{72}.$$

$50 < 72$ булганга күрә, $\sqrt{50} < \sqrt{72}$. Димәк, $\sqrt{50} < 6\sqrt{2}$.

Мәсьәләне икенче ысул белән чишкәндә, без $6\sqrt{2}$ аңлатмасын $\sqrt{72}$ аңлатмасына алыштырдык. Мондый рәвешүзгәртүне *тапкырлаучыны тамыр тамгасы астына кертү* дип атыйлар.

1 нче мисал. $\sqrt{a^7}$ аңлатмасында тапкырлаучыны тамыр тамгасы тышына чыгарыйк.

▶ $\sqrt{a^7}$ аңлатмасының $a \geq 0$ булганда гына мәгънәсе бар (әгәр $a < 0$ булса, $a^7 < 0$ була). a^7 тамырасты аңлатмасын $a^6 \cdot a$ тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтәбез, биредә a^6 тапкырлаучысы җөп күрсәткечле дәрәҗә булып тора. Ул вакытта

$$\sqrt{a^7} = \sqrt{a^6 \cdot a} = \sqrt{a^6} \cdot \sqrt{a} =$$

$$= \sqrt{(a^3)^2} \cdot \sqrt{a} = |a^3| \cdot \sqrt{a} = a^3\sqrt{a}. \triangleleft$$

[illegible] нче мисал. $-4\sqrt{x}$ аңлатмасында тапкырлаучыны тамыр тамгасы астына кертик.

Тискәре тапкырлаучы -4 не арифметик квадрат тамыр рәвешендә күрсәтеп булмый һәм шуңа күрә -4 не тамыр тамгасы астына кертеп булмый. Шулай да, уңай тапкырлаучы 4 не тамыр тамгасы астына кертеп, $-4\sqrt{x}$ аңлатмасының рәвешен үзгәртеп була:

$$-4\sqrt{x} = -1 \cdot 4\sqrt{x} = -1 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{x} = -\sqrt{16x}\ . \triangleleft$$

[illegible] нче мисал. $a\sqrt{2}$ аңлатмасында тапкырлаучыны тамыр тамгасы астына кертик.

a тапкырлаучысы теләсә нинди сан: уңай, нуль яки тискәре булырга мөмкин. Шуңа күрә ике очрак карыйбыз:

әгәр $a \geq 0$ икән, ул вакытта $a\sqrt{2} = |a|\sqrt{2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2a^2}$ була;

әгәр $a < 0$ икән, ул вакытта $a\sqrt{2} = -|a|\sqrt{2} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2a^2}$ була. $\triangleleft$

Күнегүләр

401 Тапкырлаучыны тамыр тамгасы тышына чыгарыгыз:

а) $\sqrt{12}$; в) $\sqrt{80}$; д) $\sqrt{125}$; ж) $\sqrt{363}$;

б) $\sqrt{18}$; г) $\sqrt{48}$; е) $\sqrt{108}$; з) $\sqrt{845}$.

402 Тапкырлаучыны тамыр тамгасы тышына чыгарыгыз һәм табылган аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{1}{2}\sqrt{24}$; в) $-\frac{1}{7}\sqrt{147}$; д) $0{,}1\sqrt{20000}$;

б) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; г) $-\frac{1}{5}\sqrt{275}$; е) $-0{,}05\sqrt{28800}$.

403. Тапкырлаучыны тамыр тамгасы тышына чыгарыгыз:

а) $\sqrt{20}$; г) $\sqrt{160}$; ж) $-0{,}125\sqrt{192}$;

б) $\sqrt{98}$; д) $0{,}2\sqrt{75}$; з) $-\frac{1}{3}\sqrt{450}$.

в) $\sqrt{200}$; е) $0{,}7\sqrt{300}$;

404 Тапкырлаучыны тамыр тамгасы астына кертегез:

а) $7\sqrt{10}$; б) $5\sqrt{3}$; в) $6\sqrt{x}$; г) $10\sqrt{y}$; д) $3\sqrt{2a}$; е) $5\sqrt{3b}$.

405 Уңай тапкырлаучыны тамыр тамгасы астына кертегез:

а) $-2\sqrt{3}$; б) $-3\sqrt{5}$; в) $-7\sqrt{a}$; г) $-0{,}2\sqrt{b}$.

406 Аңлатманы арифметик квадрат тамыр яки аңа капма-каршы булган аңлатма рәвешендә күрсәтегез:

а) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$; в) $\frac{1}{3}\sqrt{18}$; д) $5\sqrt{\frac{a}{5}}$;

б) $2\sqrt{\frac{3}{4}}$; г) $-10\sqrt{0,02}$; е) $-\frac{1}{2}\sqrt{12x}$.

407 Аңлатманы арифметик квадрат тамыр яки аңа капма-каршы булган аңлатма белән алыштырыгыз:

а) $2\sqrt{2}$; в) $-7\sqrt{3}$; д) $\frac{1}{3}\sqrt{18b}$;

б) $5\sqrt{y}$; г) $-6\sqrt{2a}$; е) $-0,1\sqrt{200c}$.

408 Аңлатмаларның кыйммәтләрен чагыштырыгыз:

а) $3\sqrt{3}$ һәм $\sqrt{12}$; в) $5\sqrt{4}$ һәм $4\sqrt{5}$;

б) $\sqrt{20}$ һәм $3\sqrt{5}$; г) $2\sqrt{5}$ һәм $3\sqrt{2}$.

409 Аңлатмаларның кыйммәтләрен чагыштырыгыз:

а) $\frac{1}{3}\sqrt{351}$ һәм $\frac{1}{2}\sqrt{188}$; в) $\sqrt{24}$ һәм $\frac{1}{3}\sqrt{216}$;

б) $\frac{1}{3}\sqrt{54}$ һәм $\frac{1}{5}\sqrt{150}$; г) $\frac{2}{3}\sqrt{72}$ һәм $7\sqrt{\frac{2}{3}}$.

410 Түбәндәге саннарны үсә бару тәртибендә урнаштырыгыз:

а) $3\sqrt{3}, 2\sqrt{6}, \sqrt{29}, 4\sqrt{2}$;

б) $6\sqrt{2}, \sqrt{58}, 3\sqrt{7}, 2\sqrt{14}$.

411 Чагыштырыгыз:

а) $2\sqrt{7}$ һәм $7\sqrt{2}$;

б) $3\sqrt{120}$ һәм $2\sqrt{270}$;

в) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ һәм $6\sqrt{\frac{1}{2}}$.

412 Тапкырлаучыны тамыр тамгасы тышына чыгарыгыз:

а) $\sqrt{7x^2}$, биредә $x \ge 0$; в) $\sqrt{x^3}$; д) $\sqrt{16y^7}$;

б) $\sqrt{10y^2}$, биредә $y < 0$; г) $\sqrt{a^5}$; е) $\sqrt{\frac{3x^3}{16}}$.

413 Тапкырлаучыны тамыр тамгасы тышына чыгарыгыз:

а) $\sqrt{8a^3}$; в) $\sqrt{48x^3}$, биредә $x \le 0$; д) $\sqrt{50a^7}$;

б) $\sqrt{300b^5}$; г) $\sqrt{72a^4}$; е) $\sqrt{27c^6}$, биредә $c < 0$.

414 Тапкырлаучыны тамыр тамгасы тышына чыгарыгыз:

а) $\sqrt{6x^2}$, биредә $x \ge 0$; в) $\sqrt{9a^3}$;

б) $\sqrt{3y^2}$, биредә $y < 0$; г) $\sqrt{50b^4}$.

Кабатлау өчен күнегүләр

415 Аңлатманы гадиләштерегез:

$$\left(\frac{2x+1}{x^2-3x}-\frac{2x-1}{x^2+3x}\right)\cdot\frac{x^2-9}{7x}+1.$$

416 Мәктәп остаханәсендә укучылар өч көн эчендә 114 китап төпләделәр. Әгәр икенче көнне укучылар беренче көндәгегә караганда 12 китапка артыграк, ә өченче көнне беренче һәм өченче көнне төпләгәннең $\frac{5}{7}$е кадәр китап төпләгән булсалар, укучылар һәр көнне ничә китап төпләгәннәр?

417 Тигезләмәне чишегез:

а) $\frac{4x-1}{12}+\frac{7}{4}=\frac{5-x}{9}$; б) $\frac{2x-9}{6}-\frac{2(5x+3)}{15}=\frac{1}{2}$.

18. Квадрат тамырларны эченә алган аңлатмаларның рәвешен үзгәртү

Без квадрат тамырларны эченә алган аңлатмаларның рәвешен бердәй үзгәртүләрнең кайберләрен карап үттек. Аларга тапкырчыгыштан, вакланмадан һәм дәрәҗәдән тамыр алу, тапкырлаучыны тамыр тамгасы астыннан чыгару, тапкырлаучыны тамыр тамгасы астына кертү керә. Квадрат тамырларны эченә алган аңлатмаларның рәвешен бердәй үзгәртүгә башка мисаллар карап үтик.

1 нче мисал. $3\sqrt{5a}-\sqrt{20a}+4\sqrt{45a}$ аңлатмасын гадиләштерик.

▶ $\sqrt{20a}$ аңлатмасында 2 санын, ә $\sqrt{45a}$ аңлатмасында 3 санын квадрат тамыр тышына чыгарып табабыз:

$$3\sqrt{5a}-\sqrt{20a}+4\sqrt{45a}=3\sqrt{5a}-2\sqrt{5a}+12\sqrt{5a}=$$
$$=\sqrt{5a}(3-2+12)=13\sqrt{5a}. \triangleleft$$

Шуңа игътибар итегез, $3\sqrt{5a}-2\sqrt{5a}+12\sqrt{5a}$ суммасын $13\sqrt{5a}$ аңлатмасы белән алыштырып, без охшаш кушылучыларны берләштердек. Бу алыштыруны, арадагы нәтиҗәне язмыйча гына, кыскарак итеп эшләргә була.

2 нче мисал. $(3\sqrt{5}-6\sqrt{2})(\sqrt{5}+2\sqrt{2})$ тапкырчыгышының рәвешен үзгәртик.

Беренче сумманың һәр буынын икенче сумманың һәр буынына тапкырлап табабыз:

$$(3\sqrt{5}-6\sqrt{2})(\sqrt{5}+2\sqrt{2})=$$
$$=3(\sqrt{5})^2-6\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+6\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}-12(\sqrt{2})^2=$$
$$=15-24=-9. \triangleleft$$

[illegible] нче мисал. $\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$ **вакланмасын кыскартыйк.**

$3=(\sqrt{3})^2$ булганга күрә, әлеге вакланманың санаучысын ике аңлатманың квадратлары аермасы рәвешендә күрсәтергә мөмкин. Табабыз:

$$\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}=\frac{x^2-(\sqrt{3})^2}{x+\sqrt{3}}=\frac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{x+\sqrt{3}}=x-\sqrt{3}. \triangleleft$$

[illegible] нче мисал. $\frac{c}{\sqrt{2}}$ **вакланмасын ваклаучысында квадрат тамыр булмаслык итеп үзгәртәбез.**

Бу вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да $\sqrt{2}$ га тапкырлыйбыз:

$$\frac{c}{\sqrt{2}}=\frac{c\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{c\sqrt{2}}{2}. \triangleleft$$

Без $\frac{c}{\sqrt{2}}$ вакланмасын аңа бердәй тигез һәм ваклаучысында тамыр тамгасы булмаган $\frac{c\sqrt{2}}{2}$ вакланмасы белән алыштырдык. Мондый очракларда вакланманың ваклаучысы *иррациональлектән котылды* диләр.

[illegible] нче мисал. $\frac{4-3\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}$ **аңлатмасының якынча кыйммәтен калькулятор ярдәмендә өтердән соң ике тамгага кадәр табабыз.**

Вакланманың ваклаучысын башта иррациональлектән котылдырсак, исәпләү эше гадирәк булыр. Моның өчен бирелгән вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да $\sqrt{6}+1$ суммасына тапкырлап табабыз:

$$\frac{4-3\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}=\frac{(4-3\sqrt{6})(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)}=\frac{4\sqrt{6}-3(\sqrt{6})^2+4-3\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2-1}=$$
$$\frac{\sqrt{6}-3\cdot6+4}{6-1}=\frac{\sqrt{6}-14}{5}.$$

Исәпләүләрдән соң

$$\frac{\sqrt{6}-14}{5}\approx-2{,}31 \triangleleft$$

икәнен табабыз.

Күнегүләр

418 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - \sqrt{y}$;

б) $-4\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{a}$;

в) $\sqrt{9a} + \sqrt{25a} - \sqrt{36a}$;

г) $\sqrt{16n} + \sqrt{25n} - \sqrt{9n}$;

д) $\sqrt{5a} - 2\sqrt{20a} - 3\sqrt{80a}$;

е) $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300}$;

ж) $3\sqrt{8} - \sqrt{50} + 2\sqrt{18}$;

з) $\sqrt{242} - \sqrt{200} + \sqrt{8}$;

и) $\sqrt{75} - 0{,}1\sqrt{300} - \sqrt{27}$;

к) $\sqrt{98} - \sqrt{72} + 0{,}5\sqrt{8}$.

419 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\sqrt{8p} - \sqrt{25} + \sqrt{18p}$;

б) $\sqrt{16c} + 2\sqrt{40c} - 3\sqrt{90c}$;

в) $5\sqrt{27} - 4\sqrt{48m} - 2\sqrt{12m}$;

г) $\sqrt{54} - \sqrt{24} + \sqrt{150}$;

д) $3\sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{200}$;

е) $2\sqrt{72} - \sqrt{50} - 2\sqrt{8}$.

420 Гамәлләрне башкарыгыз:

а) $(\sqrt{12} + \sqrt{15}) \cdot 3$;

б) $\sqrt{5} \cdot (3\sqrt{5} + 5\sqrt{8})$;

в) $(4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}) \cdot 2\sqrt{3}$;

г) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{5} + \sqrt{60}$;

д) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} + \sqrt{84}$;

е) $(\sqrt{12} + 2\sqrt{18}) \cdot \sqrt{2} - \sqrt{96}$.

421 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{12} - 2\sqrt{27})$;

б) $(5\sqrt{2} - 7\sqrt{3}) \cdot \sqrt{6}$;

в) $\sqrt{8} - (\sqrt{10} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5}$;

г) $\sqrt{48} - 2\sqrt{3} \cdot (2 - 5\sqrt{12})$.

422 Гамәлләрне башкарыгыз:

а) $(1 + 3\sqrt{2})(1 - 2\sqrt{2})$;

б) $(3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$;

в) $(2\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$;

г) $(\sqrt{5} - \sqrt{8})(\sqrt{5} - 3\sqrt{2})$;

д) $(2\sqrt{5} + \sqrt{12})(\sqrt{12} - \sqrt{5}) - \sqrt{135}$;

е) $(3\sqrt{2} - \sqrt{27})(\sqrt{27} - \sqrt{2}) - \sqrt{54}$.

423 Кыскача тапкырлау формулаларын кулланып, гамәлне башкарыгыз:

а) $(x + \sqrt{y})(x - \sqrt{y})$;

б) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$;

в) $(\sqrt{11} - 3)(\sqrt{11} + 3)$;

г) $(\sqrt{10} + \sqrt{7})(\sqrt{7} - \sqrt{10})$;

д) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$;

е) $(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2$;

ж) $(\sqrt{2} + 3)^2$;

з) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$.

424 Тапкырлагыз:

а) $(2\sqrt{5} + 1)(2\sqrt{5} - 1)$;

б) $(5\sqrt{7} - \sqrt{13})(\sqrt{13} + 5\sqrt{7})$;

в) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$;

г) $(0{,}5\sqrt{14} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 0{,}5\sqrt{14})$;

д) $(1 + 3\sqrt{5})^2$;

е) $(2\sqrt{3} - 7)^2$;

ж) $(2\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$;

з) $(3\sqrt{6} - 2\sqrt{3})^2$.

425 Гамәлләрне башкарыгыз:

а) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2-\sqrt{120}$;
б) $\sqrt{60}+(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$;
в) $(\sqrt{14}-3\sqrt{2})^2+6\sqrt{28}$;
г) $(3\sqrt{5}+\sqrt{15})^2-10\sqrt{27}$;
д) $(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}})^2$;
е) $(\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}})^2$.

426 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$;
б) $(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})$;
в) $(\sqrt{m}+\sqrt{2})^2$;
г) $(\sqrt{3}-\sqrt{x})^2$;
д) $(5\sqrt{7}-13)(5\sqrt{7}+13)$;
е) $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})$;
ж) $(6-\sqrt{2})^2+3\sqrt{32}$;
з) $(\sqrt{2}+\sqrt{18})^2-30$.

427 Квадратлар аермасы формуласын кулланып, аңлатманы тапкырлаучыларга таркатыгыз:

а) x^2-7;
б) $5-c^2$;
в) $4a^2-3$;
г) $11-16b^2$;
д) $y-3$, биредә $y\geq 0$;
е) $x-y$, биредә $x>0$; $y>0$.

428 Аңлатманы тапкырлаучыларга таркатыгыз:

а) $3+\sqrt{3}$;
б) $10-2\sqrt{10}$;
в) $\sqrt{x}+x$;
г) $a-5\sqrt{a}$;
д) $\sqrt{a}-\sqrt{2a}$;
е) $\sqrt{3m}+\sqrt{5m}$;
ж) $\sqrt{14}-\sqrt{7}$;
з) $\sqrt{33}+\sqrt{22}$.

429 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{b^2-5}{b-\sqrt{5}}$;
б) $\frac{m+\sqrt{6}}{6-m^2}$;
в) $\frac{2-\sqrt{x}}{x-4}$;
г) $\frac{b-9}{\sqrt{b}+3}$;
д) $\frac{a-b}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$;
е) $\frac{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{4x-9y}$;
ж) $\frac{\sqrt{7}-7}{\sqrt{7}-1}$;
з) $\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}$;
и) $\frac{3+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+x}$.

430 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{x^2-2}{x+\sqrt{2}}$;
б) $\frac{\sqrt{5}-a}{5-a^2}$;
в) $\frac{\sqrt{x}-5}{25-x}$;
г) $\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$;
д) $\frac{5+\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$;
е) $\frac{2\sqrt{3}-3}{5\sqrt{3}}$;
ж) $\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{2b}}{3\sqrt{a}-3\sqrt{b}}$;
з) $\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$;
и) $\frac{a+\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+a}$.

431 Вакланманың ваклаучысындагы иррациональлектән котылыгыз:

а) $\frac{x}{\sqrt{5}}$;
б) $\frac{3}{\sqrt{b}}$;
в) $\frac{2}{7\sqrt{y}}$;
г) $\frac{a}{b\sqrt{b}}$;
д) $\frac{4}{\sqrt{a+b}}$;
е) $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$;
ж) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$;
з) $\frac{8}{3\sqrt{2}}$;
и) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}$.

432 Ваклынманың ваклаучысындагы иррациональлектән котылыгыз:

а) $\frac{m}{\sqrt{x}}$; в) $\frac{3}{5\sqrt{c}}$; д) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{a}{2\sqrt{3}}$; е) $\frac{5}{4\sqrt{15}}$.

433 Ваклынманың ваклаучысындагы иррациональлектән котылыгыз:

а) $\frac{4}{\sqrt{3}+1}$; в) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; д) $\frac{33}{7-3\sqrt{3}}$;

б) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$; г) $\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; е) $\frac{15}{2\sqrt{5}+5}$.

434 Аңлатманың якынча кыйммәтен калькулятор ярдәмендә 0,01 гә кадәр төгәллек белән табыгыз:

а) $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$; б) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; в) $\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$; г) $\frac{5+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$.

435 Ваклынманың ваклаучысындагы иррациональлектән котылыгыз:

а) $\frac{x}{x+\sqrt{y}}$; в) $\frac{4}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$; д) $\frac{9}{3-2\sqrt{2}}$;

б) $\frac{b}{a-\sqrt{b}}$; г) $\frac{12}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$; е) $\frac{14}{1+5\sqrt{2}}$.

436 а) $\sqrt{\frac{3}{5}} = 0,2\sqrt{15}$; б) $\sqrt{\frac{2}{a}} = \frac{1}{a}\sqrt{2a}$

икәнен исбатлагыз.

437 Аңлатманың рәвешен үзгәртегез:

а) $\sqrt{\frac{x}{3}}$; в) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; д) $\sqrt{\frac{a^2}{2}}$, биредә $a \geq 0$;

б) $\sqrt{\frac{5}{a}}$; г) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; е) $\sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}}$, биредә $x \geq 0$.

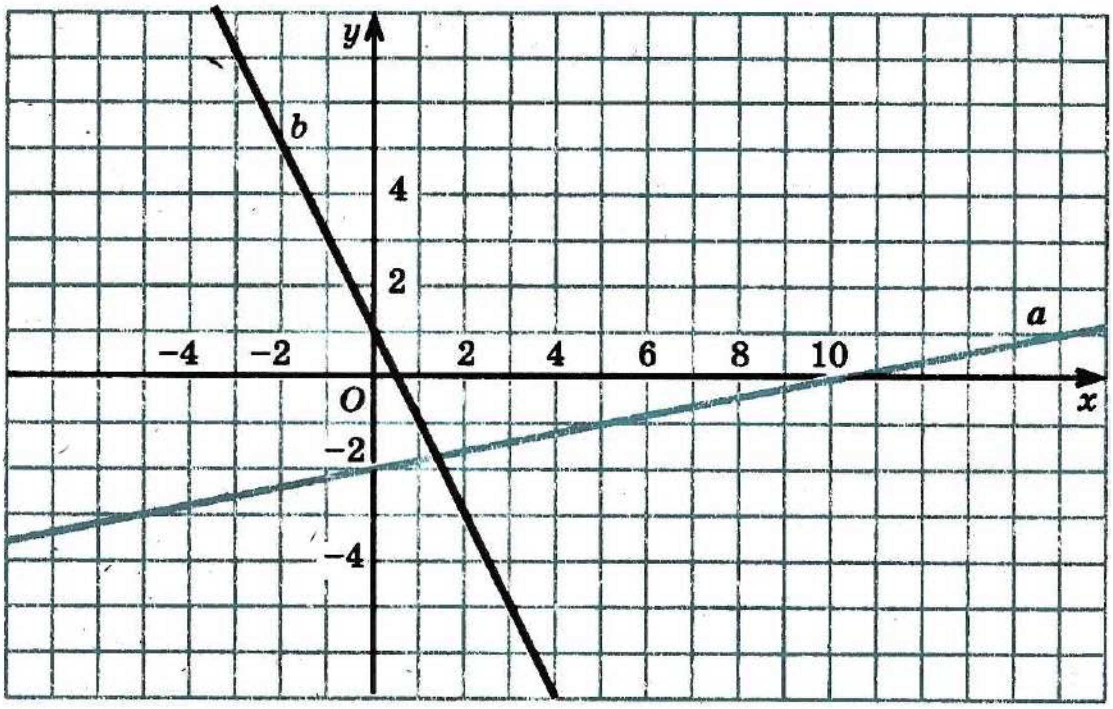
438 Аңлатманың рәвешен үзгәртегез:

а) $\sqrt{\frac{m}{9}}$; б) $\sqrt{\frac{a}{7}}$; в) $\sqrt{\frac{c}{12}}$; г) $\sqrt{\frac{8}{a}}$.

Кабатлау өчен күнегүләр

439 $\frac{9-x^2}{4x} \cdot \frac{8x}{x^2+6x+9} - 2$ аңлатмасын гадиләштерегез һәм $x = -2,5$ булганда, аның кыйммәтен табыгыз.

440 *A* дан В га 12 км/сәг тизлек белән велосипедчы чыга, ә ярты сәгатьтән соң аның артыннан 48 км/сәг тизлек белән мотоциклчы кузгала. Мотоциклчы *B* га велосипедчыга караганда 1 сәг 15 мин ка иртәрәк килеп җитә. *AB* арасы күпмегә тигез?



Рәс. 17

441 Тигезләмәне чишегез:

а) $\frac{3x-1}{2}+\frac{2-x}{3}+1=0$; б) $\frac{y-10}{6}-\frac{5-2y}{4}=2{,}5$.

442 Боҗраның мәйданы $S=\pi(R^2-r^2)$ формуласы буенча исәпләнә, биредә R — тышкы радиус, ә r — эчке радиус. R ны S һәм r аша белдерегез.

443 17 нче рәсемдә сурәтләнгән һәр туры өчен тигезләмә языгыз, аның графигы шул туры үзе була.

444 Тигезләмәне чишегез:

а) $x^2-7=0$; в) $(x+1)^2=1$;
б) $x^2+49=0$; г) $(x-5)^2=2$.

Контроль сораулар

1 $3\sqrt{a}$ аңлатмасы мисалы ярдәмендә тапкырлаучыны тамыр тамгасы астына ничек кертергә икәнен күрсәтегез.

2 $\sqrt{8a}$ аңлатмасы мисалы ярдәмендә тапкырлаучыны тамыр тамгасы астыннан ничек чыгарырга икәнен күрсәтегез.

3 $\frac{1}{\sqrt{a}}$ һәм $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ аңлатмалары мисалы ярдәмендә вакла254маның ваклаучысындагы иррациональлектән ничек котылырга икәнен күрсәтегез.

II бүлеккә өстәмә күнегүләр

4 нче параграфка

445 a һәм b саннарының натураль икәнлеге билгеле. Түбәндәге саннар натураль булырмы:

а) $a+b$; б) $a-b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$?

446 a һәм b саннары — бөтен саннар. Түбәндәге саннар бөтен сан булырмы:

а) $a+b$; б) $a-b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$?

447 a һәм b саннары рациональ саннар. Түбәндәге саннар рациональ сан булырмы:

а) $a+b$; б) $a-b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$?

448 Әгәр x һәм y җөп саннар булса, а) $x-y$; б) xy; в) $3x+y$ саннарының да җөп булуын исбатлагыз.

449 x һәм y — так саннар. Түбәндәге саннар җөп яки так сан булырмы:
а) $x+y$ суммасы;
б) $x-y$ аермасы;
в) xy тапкырчыгышы?

450 а) 0,002 дән кечерәк булган биш уңай сан;

б) $-\frac{1}{11}$ дән зуррак булган биш тискәре сан;

в) $\frac{1}{3}$ дән зуррак һәм $\frac{1}{2}$ дән кечерәк биш сан әйтегез.

451 Түбәндәге саннарны периодик чиксез унарлы вакланма рәвешендә языгыз:

а) $\frac{23}{64}$; г) $\frac{1}{27}$; ж) $\frac{23}{30}$;

б) $-\frac{7}{25}$; д) $\frac{2}{35}$; з) $\frac{12}{55}$.

в) $\frac{11}{13}$; е) $-\frac{7}{22}$;

452 Рациональ санның квадраты 3 кә тигез булмавын исбатлагыз. (Башта бөтен сан 3 кә бүленмәсә, аның квадраты да 3 кә бүленмәвен исбатлагыз.)

453 10 һәм 10,1 саннары арасындагы ике рациональ һәм ике иррациональ санны әйтегез.

454 a санының рациональ, ә b санының иррациональ сан икәнлеге билгеле. а) $a+b$; б) $a-b$ саны рациональ яки иррациональ булырмы?

455 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $0,3\sqrt{289}$; е) $\frac{\sqrt{0,16}}{2\sqrt{0,04}}$;

б) $-4\sqrt{0,81}$; ж) $\sqrt{2500}-\sqrt{625}$;

в) $\sqrt{\frac{9}{49}}-1$; з) $\sqrt{\frac{64}{81}}-\sqrt{\frac{1}{9}}$;

г) $\frac{4}{\sqrt{256}}-\frac{1}{\sqrt{64}}$; и) $-0,03\sqrt{10000}+\sqrt{16}$;

д) $2\sqrt{0,0121}+\sqrt{100}$; к) $\frac{1}{\sqrt{361}}+\sqrt{\frac{1}{4}}$.

456 Исбатлагыз:

а) $5-\left(3\sqrt{\frac{4}{9}}+\sqrt{0,25}\right)=2,5$;

б) $11:(0,15\sqrt{1600}-0,29\sqrt{400})=55$;

в) $(\sqrt{255}+3\sqrt{121}):\left(\frac{2}{3}\sqrt{0,09}+0,78\sqrt{100}\right)=6$;

г) $\left(-6\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{\sqrt{324}}{2}\cdot\frac{\sqrt{0,16}}{0,2}\right):\sqrt{25}=3$.

457 а) $x=2$; $x=2,2$; $x=5,2$; $x=22$ булганда, $\sqrt{5x-10}$;

б) $y=1$; $y=-1,5$; $y=-15$; $y=-37,5$ булганда, $\sqrt{6-2y}$;

в) $x=0$; 1; 16; 0,25 булганда, $\frac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$;

г) $a=0$, $b=0$; $a=4$, $b=7$ булганда, $\sqrt{2a-b}$;

д) $m=0$, $n=-1$; $m=33$, $n=2$ булганда, $\sqrt{m-4n}$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

458 Тигезләмәне чишегез:

а) $5\sqrt{x}=3$; в) $\frac{1}{4\sqrt{x}}=2$; д) $1+\sqrt{2x}=10$.

б) $\frac{1}{\sqrt{3x}}=1$; г) $\sqrt{x-5}=4$;

459 $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=2$ тигезләмәсен чишегез.

460 а) Ике иррациональ санның суммасы рациональ сан булырга мөмкинме?

б) Рациональ һәм иррациональ саннарның тапкырчыгышы рациональ сан була аламы?

461 а) Ике рациональ тамыры булган; б) ике иррациональ тамыры булган; в) тамырлары булмаган $x^2 = a$ рәвешендәге тигезләмәгә мисал китерегез.

462 Аңлатмада x үзгәрешлесенең мөмкин табылган кыйммәтләрен күрсәтегез:

а) $\sqrt{x^3}$; в) $\sqrt{x^2+1}$; д) $\sqrt{-x^2}$;

б) $\sqrt{x^4}$; г) $\sqrt{(4-x)^2}$; е) $\sqrt{-x^3}$.

463 a һәм b ның нинди кыйммәтләре өчен аңлатманың мәгънәсе бар:

а) $\sqrt{ab}$; б) $\sqrt{-ab}$; в) $\sqrt{a^2b}$; г) $\sqrt{a^2b^2}$; д) $\sqrt{-ab^2}$?

464 Үзгәрешленең нинди кыйммәтләре өчен аңлатманың мәгънәсе бар:

а) $\frac{4}{\sqrt{x}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{x+2}}$; в) $\frac{5}{\sqrt{x}-1}$?

465 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{0,16}+(2\sqrt{0,1})^2$; г) $(3\sqrt{3})^2+(-3\sqrt{3})^2$;

б) $(0,2\sqrt{10})^2+0,5\sqrt{16}$; д) $(5\sqrt{2})^2-(2\sqrt{5})^2$;

в) $\sqrt{144}-0,5(\sqrt{12})^2$; е) $(-3\sqrt{6})^2-3(\sqrt{6})^2$.

466 Координаталар яссылыгындагы ике нокта: $A\ (x_1;\ y_1)$ һәм $B\ (x_2;\ y_2)$ арасындагы ераклык $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ формуласы буенча исәпләнә. $A(-3,5;\ 4,3)$ һәм $B\ (7,8;\ 0,4)$ нокталары арасындагы ераклыкны калькулятор ярдәмендә исәпләп чыгарыгыз.

467 Саннарны чагыштырыгыз:

а) $\sqrt{7,5}$ һәм $\sqrt{7,6}$; г) $\sqrt{2,16}$ һәм $\sqrt{2\frac{1}{6}}$; ж) $\sqrt{7}$ һәм 2,6;

б) $\sqrt{0,1}$ һәм $\sqrt{0,01}$; д) $\sqrt{\frac{5}{9}}$ һәм $\sqrt{\frac{6}{11}}$; з) 3,2 һәм $\sqrt{9,8}$;

в) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ һәм $\sqrt{0,3}$; е) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ һәм $\sqrt{0,(3)}$; и) $\sqrt{1,23}$ һәм 1,1.

6 нчы параграфка

468 Исәпләгез:

а) $\sqrt{196\cdot0,81\cdot0,36}$; в) $\sqrt{0,87\cdot49+0,82\cdot49}$;

б) $\sqrt{1\frac{9}{16}\cdot5\frac{4}{9}\cdot0,01}$; г) $\sqrt{1,44\cdot1,21-1,44\cdot0,4}$.

469 Тамырның кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{\frac{165^2-124^2}{164}}$; в) $\sqrt{\frac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}$;

б) $\sqrt{\frac{98}{176^2-112^2}}$; г) $\sqrt{\frac{145,5^2-96,5^2}{193,5^2-31,5^2}}$.

470 Исәпләгез:

а) $15\sqrt{20}\cdot 0,1\sqrt{45}$;   в) $\dfrac{8\sqrt{5}}{0,4\sqrt{0,2}}$;

б) $0,3\sqrt{10}\cdot 0,2\sqrt{15}\cdot 0,5\sqrt{6}$;   г) $\dfrac{\sqrt{0,48}}{5\sqrt{12}}$.

471 $a < 0$ һәм $b < 0$ икәне билгеле.

а) $\sqrt{ab}$ аңлатмасын тамырлар тапкырчыгышы рәвешендә;

б) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ аңлатмасын тамырлар өлеше рәвешендә күрсәтегез.

472 Аңлатманың кыйммәтен исәпләгез (әгәр аның мәгънәсе булса):

а) $\sqrt{(-12)^2}$;   в) $\sqrt{-10^2}$;   д) $\sqrt{-(-15^2)}$;

б) $-\sqrt{10^2}$;   г) $-\sqrt{(-11)^2}$;   е) $-\sqrt{(-25)^2}$.

473 Исәпләгез:

а) $3\sqrt{(-2)^6}$;   г) $0,1\sqrt{2^{10}}$;   ж) $-\sqrt{(-2)^{12}}$;

б) $-\sqrt{10^4}$;   д) $0,1\sqrt{(-3)^8}$;   з) $2,5\sqrt{(-0,1)^4}$.

в) $-3\sqrt{5^4}$;   е) $100\sqrt{0,1^{10}}$;

474 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\sqrt{4^8}$;   г) $\sqrt{25^3}$;   ж) $\sqrt{750\cdot 270}$;

б) $\sqrt{9^5}$;   д) $\sqrt{8\cdot 162}$;   з) $\sqrt{853776}$.

в) $\sqrt{16^5}$;   е) $\sqrt{96\cdot 486}$;

475 x ның нинди кыйммәтләре өчен $\sqrt{x^2}=(\sqrt{x})^2$ тигезлеге дөрес?

476 Үзгәрешленең нинди кыйммәтләре өчен тигезлек дөрес:

а) $\sqrt{y^4}=y^2$;   в) $\sqrt{x^6}=x^3$;   д) $\sqrt{a^{14}}=-a^7$;

б) $\sqrt{x^{12}}=x^6$;   г) $\sqrt{c^{10}}=-c^5$;   е) $\sqrt{b^8}=b^4$?

477 Түбәндәге формула белән бирелгән функциянең графигын төзегез:

а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$;   б) $y=\dfrac{-2\sqrt{x^2}}{x}$;   в) $y=x\sqrt{x^2}$;   г) $y=-x\sqrt{x^2}$.

478 Аңлатманың рәвешен үзгәртегез:

а) $\sqrt{a^4b^4}$;   д) $\sqrt{\dfrac{p^4}{a^8}}$;

б) $\sqrt{b^6c^8}$, биредә $b \geq 0$;   е) $\sqrt{\dfrac{16a^{12}}{b^{10}}}$, биредә $b > 0$;

в) $\sqrt{16x^4y^{12}}$;   ж) $\sqrt{\dfrac{4x^2}{y^6}}$, биредә $x < 0$; $y < 0$;

г) $\sqrt{0,25p^2y^6}$, биредә $p \geq 0$, $y \leq 0$;   з) $\sqrt{\dfrac{c^6}{9a^2}}$, биредә $c < 0$, $a > 0$.

479 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\sqrt{(-a)^2}$; б) $\sqrt{(-a)^2(-b)^4}$.

7 нче параграфка

480 Тапкырлаучыны тамыр тамгасы тышына чыгарыгыз:

а) $0{,}5\sqrt{60a^2}$; в) $0{,}1\sqrt{150x^3}$; д) $a\sqrt{18a^2b}$;

б) $2{,}1\sqrt{300x^4}$; г) $0{,}2\sqrt{225a^5}$; е) $-m\sqrt{48am^4}$.

481 Тапкырлаучыны тамыр тамгасы тышына чыгарыгыз:

а) $\sqrt{9a^2b}$, биредә $a<0$; д) $\sqrt{-3c^3}$;

б) $\sqrt{25a^2b^3}$, биредә $a>0$; е) $\sqrt{-5m^7}$;

в) $\sqrt{144a^3b^3}$, биредә $a<0$, $b<0$; ж) $a\sqrt{a^5}$;

г) $\sqrt{32a^4x^3}$; з) $\frac{1}{x}\sqrt{-x^3}$.

482 Тапкырлаучыны тамыр тамгасы астына кертегез:

а) $a\sqrt{3}$, биредә $a\geq 0$; в) $\sqrt{\frac{2}{x}}$;

б) $a\sqrt{3}$, биредә $a<0$; г) $\sqrt{-\frac{2}{x}}$.

483 Үзгәрешленең нинди кыйммәтләре өчен тигезлек дөрес:

а) $x\sqrt{3}=\sqrt{3x^2}$; в) $\sqrt{7c^2}=-c\sqrt{7}$;

б) $y\sqrt{5}=-\sqrt{5y^2}$; г) $\sqrt{3a^2}=-a\sqrt{3}$?

484 Тапкырлаучыны тамыр тамгасы астына кертегез:

а) $x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$; д) $ab\sqrt{\frac{b}{a}}$, биредә $a>0$, $b>0$;

б) $-x^2\sqrt{5}$; е) $2ab\sqrt{\frac{a}{2b}}$, биредә $a<0$, $b<0$;

в) $-3a\sqrt{\frac{1}{3}a}$; ж) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$, биредә $a>0$, $b>0$;

г) $3a\sqrt{-\frac{a}{3}}$; з) $-ab\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, биредә $a>0$, $b<0$.

485 Саннарны чагыштырыгыз:

а) $0{,}2\sqrt{200}$ һәм $10\sqrt{8}$; в) $0{,}5\sqrt{108}$ һәм $9\sqrt{3}$;

б) $7\sqrt{\frac{32}{49}}$ һәм $0{,}8\sqrt{50}$; г) $\frac{5}{2}\sqrt{63}$ һәм $4{,}5\sqrt{28}$.

486 Саннарны үсә бару тәртибендә урнаштырыгыз:

а) $\frac{2}{3}\sqrt{72}$, $\sqrt{30}$ һәм $7\sqrt{2}$; в) $8\sqrt{0,2}$, $\sqrt{41}$ һәм $\frac{2}{5}\sqrt{250}$;

б) $5\sqrt{\frac{7}{2}}$, $\sqrt{17}$ һәм $\frac{1}{2}\sqrt{62}$; г) $12\sqrt{0,5}$, $\sqrt{89}$ һәм $\frac{3}{4}\sqrt{160}$.

487 Тапкырлагыз:

а) $\sqrt{x}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$;

б) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt{x}$;

в) $\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$;

г) $(\sqrt{m}-\sqrt{n})\sqrt{mn}$;

д) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(2\sqrt{x}-\sqrt{y})$;

е) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(3\sqrt{a}+2\sqrt{b})$;

ж) $(2\sqrt{a}+\sqrt{b})(3\sqrt{a}-2\sqrt{b})$;

з) $(4\sqrt{x}-\sqrt{2x})(\sqrt{x}-\sqrt{2x})$.

488 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}+x)$;

б) $(\sqrt{a}+2)(a-2\sqrt{a}+4)$;

в) $(\sqrt{m}-\sqrt{n})(m+n+\sqrt{mn})$;

г) $(x+\sqrt{y})(x^2+y-x\sqrt{y})$.

489 а) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$; б) $\sqrt{8\sqrt{3}+19}=\sqrt{3}+4$ икәнен исбат итегез.

490 а) $x=1+\sqrt{5}$ булганда, x^2-6;

б) $x=3-\sqrt{3}$ булганда, x^2-6x;

в) $x=2+\sqrt{3}$ булганда, x^2-4x+3;

г) $x=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ булганда, x^2-3x+5

аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

491 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ һәм $\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ аңлатмаларының кыйммәтләре натураль саннар булуын исбатлагыз.

492 Аңлатманың кыйммәте рациональ сан икәнен исбатлагыз:

а) $\frac{1}{3\sqrt{2}-4}-\frac{1}{3\sqrt{2}+4}$;

б) $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}+\frac{1}{5-2\sqrt{6}}$.

493 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $\frac{1}{11-2\sqrt{30}}-\frac{1}{11+2\sqrt{30}}$;

б) $\frac{5}{3+2\sqrt{2}}+\frac{5}{3-2\sqrt{2}}$;

в) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$;

г) $\frac{11+\sqrt{21}}{11-\sqrt{21}}+\frac{11-\sqrt{21}}{11+\sqrt{21}}$.

494 $x=3+\sqrt{5}$ һәм $y=3-\sqrt{5}$ булганда, $\frac{x^2-3xy+y^2}{x+y+2}$ вакланмасының кыйммәтен табыгыз.

495 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;

б) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$;

в) $\frac{2\sqrt{2}-x\sqrt{x}}{2+\sqrt{2x}+x}$;

г) $\frac{a-\sqrt{3a}+3}{a\sqrt{a}+3\sqrt{3}}$.

496 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\dfrac{\sqrt{70}-\sqrt{30}}{\sqrt{35}-\sqrt{15}}$;   в) $\dfrac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$;   д) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{15}-5}{\sqrt{6}-\sqrt{10}}$;   г) $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$;   е) $\dfrac{(\sqrt{10}-1)^2-3}{\sqrt{10}+\sqrt{3}-1}$.

497 Вакланманың ваклаучысындагы иррациональлектән котылыгыз:

а) $\dfrac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$;   в) $\dfrac{x-\sqrt{ax}}{a\sqrt{x}}$;   д) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{5\sqrt{3}}$;

б) $\dfrac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}}$;   г) $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$;   е) $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$.

498 Вакланманың ваклаучысындагы иррациональлектән котылыгыз:

а) $\dfrac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;   в) $\dfrac{1-2\sqrt{x}+4x}{1-2\sqrt{x}}$;

б) $\dfrac{9+3\sqrt{a}+a}{3+\sqrt{a}}$;   г) $\dfrac{a^2b+2a\sqrt{b}+4}{a\sqrt{b}+2}$.

499 Вакланманың санаучысындагы иррациональлектән котылыгыз:

а) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$;   в) $\dfrac{7-\sqrt{a}}{49-7\sqrt{a}+a}$;

б) $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}}$;   г) $\dfrac{\sqrt{mn}+1}{mn+\sqrt{mn}+1}$.

500 Вакланманың ваклаучысындагы иррациональлектән котылыгыз:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$;   б) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2}$.

501 x ның нинди кыйммәтендә $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ вакланмасы иң зур кыйммәткә ирешә?

502 Аңлатманы гадиләштерегез:

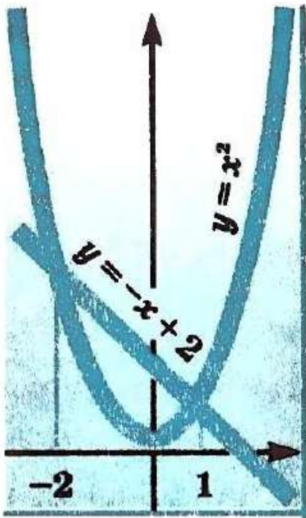
а) $15\sqrt{\dfrac{2}{5}}-\sqrt{160}$;   в) $6\sqrt{1\dfrac{1}{3}}-\sqrt{27}$;

б) $\sqrt{135}+10\sqrt{0,6}$;   г) $0,5\sqrt{24}+10\sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

503 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\left(\dfrac{1}{x+x\sqrt{y}}+\dfrac{1}{x-x\sqrt{y}}\right)\cdot\dfrac{y-1}{2}$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\dfrac{(b-a)^2}{2}$.



III бүлек

Квадрат тигезләмәләр

§ 8 Квадрат тигезләмә һәм аның тамырлары

19. Квадрат тигезләмәнең билгеләмәсе. Тулы булмаган квадрат тигезләмәләр

$-x^2 + 6x + 1{,}4 = 0$, $8x^2 - 7x = 0$, $x^2 - \frac{4}{9} = 0$ тигезләмәләренең һәркайсы $ax^2 + bx + c = 0$ рәвешендә күрсәтелгән, биредә x — үзгәрешле a, b һәм c — саннар. Беренче тигезләмәдә $a = -1$, $b = 6$ һәм $c = 1{,}4$, икенчесендә $a = 8$, $b = -7$ һәм $c = 0$, өченчесендә $a = 1$, $b = 0$ һәм $c = -\frac{4}{9}$. Андый тигезләмәләрне *квадрат тигезләмәләр* дип атыйлар.

Билгеләмә. $ax^2 + bx + c = 0$ рәвешендәге тигезләмә квадрат тигезләмә дип атала, биредә x — үзгәрешле, a, b һәм c — нинди дер саннар, өстәвенә $a \neq 0$.

a, b һәм c саннары — квадрат тигезләмәнең коэффициентлары, a саны — беренче коэффициент, b ны — икенче коэффициент һәм c ны ирекле буын дип атыйлар.

Квадрат тигезләмәне тагын икенче дәрәҗә тигезләмә дип тә атыйлар, чөнки аның сул кисәге — икенче дәрәҗә күпбуын.

Әгәр $ax^2 + b + c = 0$ квадрат тигезләмәсендә b һәм c коэффициентларының берсе генә нульгә тигез булса да, андый тигезләмәне *тулы булмаган квадрат тигезләмә* дип атыйлар. Мәсәлән, $-2x^2 + 7 = 0$, $3x^2 - 10x = 0$ һәм $-4x^2 = 0$ тигезләмәләре — тулы булмаган квадрат тигезләмәләр. Аларның беренчесендә $b = 0$, икенчесендә $c = 0$, ә өченчесендә $b = 0$ һәм $c = 0$.

Тулы булмаган квадрат тигезләмәләр өч төрдә була:

1) $ax^2 + c = 0$, биредә $c \neq 0$;

2) $ax^2 + bx = 0$, биредә $b \neq 0$;

3) $ax^2 = 0$.

Һәр төр тигезләмәнең чишелешләрен карыйк.

1 нче мисал. $-3x^2 + 15 = 0$ тигезләмәсен чишик.

▶ Иректе буынны тигезләмәнең уң кисәгенә күчерәбез һәм килеп чыккан тигезләмәнең ике кисәген дә −3 кә бүләбез:

$$-3x^2 = -15,$$
$$x^2 = 5,$$
$$x = \sqrt{5} \text{ яки } x = -\sqrt{5}.$$

Җавап: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$. ◁

2 нче мисал. $4x^2 + 3 = 0$ тигезләмәсен чишик.

▶ Иректе буынны тигезләмәнең уң кисәгенә күчерәбез һәм килеп чыккан тигезләмәнең ике кисәген дә 4 кә бүләбез:

$$4x^2 = -3,$$
$$x^2 = -\frac{3}{4}.$$

Санның квадраты тискәре сан була алмаганлыктан, килеп чыккан тигезләмәнең тамырлары юк. Шулай булгач, аңа тамырдаш булган $4x^2 + 3 = 0$ тигезләмәсенең дә тамырлары булмый.

Җавап: тамырлары юк. ◁

$c \neq 0$ булганда, $ax^2 + c = 0$ рәвешендәге тулы булмаган квадрат тигезләмәне чишү өчен, аның иректе буынын уң кисәгенә күчерәләр һәм тигезләмәнең ике кисәген дә a га бүләләр. $ax^2 + c = 0$ тигезләмәсенә тамырдаш булган

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

тигезләмәсен табалар.

$c \neq 0$, шуңа күрә $-\frac{c}{a} \neq 0$.

Әгәр $-\frac{c}{a} > 0$ булса, тигезләмәнең ике тамыры була:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ һәм } x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Әгәр $-\frac{c}{a} < 0$ булса, тигезләмәнең тамырлары булмый.

[illegible] мисал. $4x^2 + 9x = 0$ тигезләмәсен чишик.

▶ Тигезләмәнең сул кисәген тапкырлаучыларга таркатабыз:

$$x(4x + 9) = 0.$$

Моннан

$$x = 0 \text{ яки } 4x + 9 = 0.$$

$4x + 9 = 0$ тигезләмәсен чишәбез:

$$4x = -9,$$

$$x = -2\frac{1}{4}.$$

Җавап: $x_1 = 0$, $x_2 = -2\frac{1}{4}$. ◁

Гомумән, $b \neq 0$ булганда, $ax^2 + bx = 0$ рәвешендәге тулы булмаган квадрат тигезләмәне чишү өчен, аның сул кисәген тапкырлаучыларга таркаталар һәм

$$x(ax + b) = 0$$

тигезләмәсен табалар.

$x(ax + b)$ тапкырчыгышы тапкырлаучыларның берсе нульгә тигез булганда һәм бары тик шул вакытта гына нульгә тигез була:

$$x = 0 \text{ яки } ax + b = 0.$$

$a \neq 0$ булган $ax + b = 0$ тигезләмәсен чишеп табабыз:

$$ax = -b,$$

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Димәк, $x(ax + b)$ тапкырчыгышы, $x = 0$ һәм $x = -\frac{b}{a}$ булганда, нульгә әйләнә. 0 һәм $-\frac{b}{a}$ саннары $ax^2 + bx = 0$ тигезләмәсенең тамырлары була.

Шулай булгач, $b \neq 0$ булганда, $ax^2 + b = 0$ тулы булмаган квадрат тигезләмәнең һәрвакытта да ике тамыры була.

$ax^2 = 0$ рәвешендәге тулы булмаган квадрат тигезләмә $x^2 = 0$ тигезләмәсенә тамырдаш һәм шуңа күрә бердәнбер тамыры бар.

Күнегүләр

504 Түбәндәге тигезләмәләр квадрат тигезләмә буламы:

а) $3{,}7x^2 - 5x + 1 = 0$;
б) $48x^2 - x^3 - 9 = 0$;
в) $2{,}1x^2 + 2x - \frac{2}{3} = 0$;
г) $1 - 12x = 0$;
д) $7x^2 - 13 = 0$;
е) $-x^2 = 0$?

505 Квадрат тигезләмәнең коэффициентларын күрсәтегез:

а) $5x^2 - 9x + 4 = 0$; г) $-4x^2 + 5x = 0$;

б) $x^2 + 3x - 10 = 0$; д) $6x^2 - 30 = 0$;

в) $-x^2 - 8x + 1 = 0$; е) $9x^2 = 0$.

506 Тигезләмәне $ax^2 + bx + c = 0$ рәвешенә китерегез:

а) $(2x - 1)(2x + 1) = x(2x + 3)$;

б) $(3x + 2)^2 = (x + 2)(x - 3)$;

в) $(x + 1)(x + 2) = (2x - 1)(x - 2)$;

г) $(x + 3)(3x - 2) = (4x + 5)(2x - 3)$.

507 Бирелгән тигезләмәне аңа тамырдаш булган квадрат тигезләмә белән алыштырыгыз:

а) $4x^2 - 2x(3x + 1) = 5$;

б) $x^2 + (1 - x)(1 - 3x) = x$;

в) $-5x(x + 6) = 4(x - 3) - 10$;

г) $(x - 8)(2x + 3) = (3x - 5)(x + 4)$.

508 Төрле төрдәге тулы булмаган квадрат тигезләмәләргә мисаллар китерегез.

509 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз:

а) $4x^2 - 9 = 0$; в) $-0{,}1x^2 + 10 = 0$; д) $6v^2 + 24 = 0$;

б) $-x^2 + 3 = 0$; г) $y^2 - \frac{1}{9} = 0$; е) $3m^2 - 1 = 0$.

510 Тигезләмәне чишегез:

а) $3x^2 - 4x = 0$; в) $10x^2 + 7x = 0$; д) $6z^2 - z = 0$;

б) $-5x^2 + 6x = 0$; г) $4a^2 - 3a = 0$; е) $2y + y^2 = 0$.

511 Тигезләмәне чишегез:

а) $2x^2 + 3x = 0$; в) $5u^2 - 4u = 0$; д) $1 - 4y^2 = 0$;

б) $3x^2 - 2 = 0$; г) $7a - 14a^2 = 0$; е) $2x^2 - 6 = 0$.

512 Тигезләмәне чишегез:

а) $4x^2 - 3x + 7 = 2x^2 + x + 7$; в) $10 - 3x^2 = x^2 + 10 - x$;

б) $-5y^2 + 8y + 8 = 8y + 3$; г) $1 - 2y + 3y^2 = y^2 - 2y + 1$.

513 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз:

а) $(x + 3)(x - 4) = -12$;

б) $1\frac{2}{3}x + (2x + 1)\left(\frac{1}{3}x - 1\right) = 0$;

в) $(3x - 1)^2 - 1 = 0$;

г) $3x(2x + 3) = 2x(x + 4{,}5) + 2$;

д) $18 - (x - 5)(x - 4) = -x^2$;

е) $(x - 1)(x + 1) = 2(x^2 - 3)$.

514 Тигезләмәне чишегез:

а) $x^2 - 5 = (x + 5)(2x - 1)$; г) $6a^2 - (a + 2)^2 = -4(a - 4)$;

б) $(2x + 3)(3x + 1) = 11x + 30$; д) $x(7 - 6x) = (1 - 3x)(1 + 2x)$;

в) $2x - (x + 1)^2 = 3x^2 - 6$; е) $(5y + 2)(y - 3) = -13(2 + y)$.

515 Әзлекле килүче ике бөтен санның тапкырчыгышы аның кечкенәсенең квадратыннан 1,5 тапкыр зуррак. Бу саннарны табыгыз.

516 Әгәр квадраттан мәйданы 59 $см^2$ булган өчпочмак кисеп алсак, калган кисәкнең мәйданы 85 $см^2$ була. Квадратның ягын табыгыз.

517 Квадратның мәйданы түгәрәк мәйданыннан 12 $см^2$ га зуррак. Әгәр түгәрәкнең мәйданы 36 $см^2$ га тигез булса, квадратның ягын табыгыз.

518 Түгәрәкнең мәйданы 1 $дм^2$ га тигез. Түгәрәкнең радиусын табыгыз.

519 Мәйданы r см радиуслы түгәрәк мәйданы кадәр булган квадратның ягын табыгыз.

Кабатлау өчен күнегүләр

520 Функциянең графигы координаталар чирекләренең кайсысында урнашкан:

а) $y = (1 - \sqrt{2})x$; б) $y = (\sqrt{35} - 5{,}7)x$?

521 $x = 0{,}36$ һәм $x = 49$ булганда, $\frac{9+6x+x^2}{x+3} + \sqrt{x}$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

522 Вакланманың кыйммәтен нуль белән чагыштырыгыз (җавапны тигезсезлек рәвешендә языгыз):

а) $\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+1}$; б) $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2+1}$.

20. Квадрат тигезләмәләрне икебуынның квадратын аерып чыгару юлы белән чишү

Тулы квадрат тигезләмәләр, ягъни барлык өч коэффициенты да нульгә тигез булмаган тигезләмәләрне чишүгә мисаллар карыйк. Беренче коэффициенты 1 гә тигез булган тигезләмәләрдән башлыйк. Андый тигезләмәләрне *китерелгән квадрат тигезләмәләр* дип атыйлар.

$$x^2 + 10x + 25 = 0$$

китерелгән квадрат тигезләмәсен чишик.

Тигезләмәнең сул кисәген икебуынның квадраты рәвешендә күрсәтеп табабыз:

$$(x + 5)^2 = 0.$$

Моннан

$$x + 5 = 0,$$
$$x = -5.$$

Җ а в а п: −5.

Тагын бер китерелгән квадрат тигезләмә чишик:

$$x^2 - 6x - 7 = 0. \qquad (1)$$

Әгәр $x^2 - 6x$ аермасына 9 санын кушсак, килеп чыккан аңлатманы $(x-3)^2$ рәвешендә, ягъни икебуынның квадраты рәвешендә язып була. (1) тигезләмәсенең ике кисәгенә дә 9 ны кушабыз, ә ирекле буынны уң кисәккә күчерәбез. Табабыз:

$$x^2 - 6x + 9 = 9 + 7.$$

Бу тигезләмәнең рәвешен үзгәртәбез:

$$(x-3)^2 = 16.$$

Моннан

$$x - 3 = -4 \text{ яки } x - 3 = 4,$$

$$x = -1 \text{ яки } x = 7.$$

Җавап: $x_1 = -1$, $x_2 = 7$.

(1) тигезләмәсен чишү ысулын *икебуынның квадратын аеру* дип атыйлар. Шушы ысул белән тагын берничә квадрат тигезләмә чишик.

1 нче мисал. $x^2 + 8x - 1 = 0$ тигезләмәсен чишик.

▶ Табабыз:

$$x^2 + 2x \cdot 4 - 1 = 0,$$

$$x^2 + 2x \cdot 4 + 16 = 16 + 1,$$

$$(x+4)^2 = 17;$$

$$x + 4 = -\sqrt{17} \text{ яки } x + 4 = \sqrt{17},$$

$$x = -4 - \sqrt{17} \text{ яки } x = -4 + \sqrt{17}.$$

Җавап: $x_1 = -4 - \sqrt{17}$, $x_2 = -4 + \sqrt{17}$. ◁

2 нче мисал. $x^2 - 4x + 10 = 0$ тигезләмәсен чишик.

▶

$$x^2 - 2x \cdot 2 + 4 = 4 - 10,$$

$$(x-2)^2 = -6$$

була.

Җавап: тамырлары юк. ◁

3 нче мисал. $3x^2 - 5x - 2 = 0$ тигезләмәсен чишик.

▶ Тигезләмәнең ике кисәген дә 3 кә бүлеп,

$$x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0$$

китерелгән квадрат тигезләмәсен табабыз.

Квадрат икебуын аерабыз һәм килеп чыккан тигезләмәне чишәбез:

$$x^2 - 2x \cdot \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = 0,$$

$$x^2 - 2x \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3},$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{49}{36},$$

$$x - \frac{5}{6} = -\sqrt{\frac{49}{36}} \text{ яки } x - \frac{5}{6} = \sqrt{\frac{49}{36}},$$

$$x - \frac{5}{6} = -\frac{7}{6} \text{ яки } x - \frac{5}{6} = \frac{7}{6},$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ яки } x = 2.$$

Җавап: $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$. ◁

Күнегүләр

523 Тигезләмәне чишегез:
а) $x^2 + 12x + 36 = 0$;
б) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$.

524 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз:
а) $x^2 - 8x + 15 = 0$;
б) $x^2 + 12x + 20 = 0$;
в) $x^2 - 5x - 6 = 0$;
г) $x^2 - 8x - 9 = 0$.

525 Тигезләмәне чишегез:
а) $x^2 - 4x + 3 = 0$;
б) $x^2 + 3x - 10 = 0$;
в) $x^2 \pm 9x + 14 = 0$;
г) $x^2 - 2x - 1 = 0$.

526 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз:
а) $x^2 - 6x + 8 = 0$;
б) $x^2 + x - 6 = 0$;
в) $x^2 + 4x + 3 = 0$;
г) $x^2 + 4x - 2 = 0$.

527 Тигезләмәне чишегез:
а) $2x^2 - 9x + 10 = 0$;
б) $5x^2 + 3x - 8 = 0$.

528 $5x^2 + 14x - 3 = 0$ тигезләмәсен чишегез.

Кабатлау өчен күнегүләр

529 Аңлатмаларның кайсысы a ның теләсә нинди кыйммәтләре өчен уңай кыйммәтләр ала:
a^2+4, $(a+8)^2$, $5a+2$, $a+13$, $(a-4)^2+4$, $(a+1)^2-1$?

530 Аңлатманы гадиләштерегез:

$$\left(\frac{8}{8-c^3}+\frac{c}{c-2}-1\right)\cdot\left(\frac{c}{c+2}-\frac{c+2}{2}\right).$$

531 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{(3x-6)^2}{(2-x)^2}$; б) $\frac{a^2+8a+16}{(2a+8)^2}$.

532 $(\sqrt{10+5\sqrt{3}}+\sqrt{10-5\sqrt{3}})^2$ аңлатмасының кыйммәте рациональ сан икәнен күрсәтегез.

Контроль сораулар

1. Квадрат тигезләмә билгеләмәсен әйтеп бирегез.
2. Нинди тигезләмәне тулы булмаган квадрат тигезләмә дип атыйлар? Төрле төрдәге тулы булмаган квадрат тигезләмәләргә мисаллар китерегез.
3. Һәр төр тулы булмаган квадрат тигезләмәнең ничә тамыры бар?
4. Нинди тигезләмәне китерелгән квадрат тигезләмә дип атыйлар?
5. Китерелгән квадрат тигезләмәне икебуынның квадратын аеру юлы белән чишү ысулын мисал ярдәмендә күрсәтегез.

§ 9. Квадрат тигезләмә тамырларының формуласы

21. Квадрат тигезләмәләрне формула кулланып чишү

Квадрат тигезләмәләрне икебуынның квадратын аерып алу ысулы белән чишү еш кына зур рәвешүзгәртүләр эшләүгә китерә. Шуңа күрә башкача эшлиләр. Тигезләмәне гомуми рәвештә чишәләр һәм нәтиҗәдә тамырлар табу формуласы килеп чыга. Аннары ул формуланы теләсә нинди квадрат тигезләмәне чишкәндә кулланалар.

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

квадрат тигезләмәсен чишик.

Тигезләмәнең ике кисәген дә a га бүлеп, аңа тамырдаш булган

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

китерелгән квадрат тигезләмәсен табарбыз.

Бу тигезләмәнең рәвешен үзгәртәбез:

$$x^2 + 2x\cdot\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a},$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad (2)$$

(2) тигезләмәсе (1) тигезләмәсенә тамырдаш. Аның тамырлары саны $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ вакланмасының тамгасына бәйле. $a \neq 0$ булганлыктан, $4a^2$ ваклаучысы — уңай сан, шуңа күрә бу вакланманың тамгасы аның санаучысының, ягъни $b^2 - 4ac$ аңлатмасының тамгасы белән билгеләнә. Бу аңлатманы $ax^2 + bx + c = 0$ *квадрат тигезләмәсенең дискриминанты* дип атыйлар (латинча «дискриминант» — аеручы). Аны D хәрефе белән тамгалыйлар, ягъни

$$D = b^2 - 4ac.$$

(2) тигезләмәсен

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$$

рәвешендә язабыз.

Хәзер D га бәйле рәвештә мөмкин булган төрле очракларны карыйк.

1) Әгәр $D > 0$ булса,

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ яки } x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ яки } x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \text{ яки } x = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \text{ була.}$$

Шулай итеп, бу очракта (1) тигезләмәсенең ике тамыры бар:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \text{ һәм } x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Тамырларны кыскача түбәндәгечә язу кабул ителгән:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ биредә } D = b^2 - 4ac. \qquad \text{(I)}$$

Бу язманы *квадрат тигезләмәнең тамырлары формуласы* дип атыйлар.

2) Әгәр $D = 0$ булса, (2) тигезләмәсе

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

рәвешен алыр. Моннан

$$x + \frac{b}{2a} = 0,$$

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Бу очракта (1) тигезләмәсенең бер тамыры бар: $-\frac{b}{2a}$.

Квадрат тигезләмә тамырлары формуласыннан бу очракта да файдаланырга мөмкин. Дөрестән дә, $D = 0$ булганда, (1) формуласы

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$$

рәвешен ала. Моннан

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

3) Әгәр $D < 0$ булса, $\frac{D}{4a^2}$ вакланмасының кыйммәте тискәре була, һәм шуңа күрә

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$$

тигезләмәсенең һәм, димәк, (1) тигезләмәсенең дә тамырлары юк.

Шулай итеп, квадрат тигезләмәнең дискриминантка бәйле рәвештә ике тамыры ($D > 0$ булганда), бер тамыры ($D = 0$ булганда) булырга мөмкин яки тамырлары булмаска мөмкин ($D < 0$ булганда).

(I) формуласы буенча квадрат тигезләмәне чишкәндә түбәндәгечә эшләү максатка ярашлырак:
1) дискриминантны исәпләргә һәм аны нуль белән чагыштырырга;
2) әгәр дискриминант уңай яки нульгә тигез булса, тамырлар формуласыннан файдаланырга, әгәр дискриминант тискәре булса, тамырлары юк дип язарга кирәк.

1 нче мисал. $12x^2 + 7x + 1 = 0$ тигезләмәсен чишик.

▶ Дискриминантны табабыз:

$$D = 7^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 1,\ D > 0.$$

Квадрат тигезләмә тамырларының формуласын кулланабыз:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{24},$$

$$x = \frac{-7 \pm 1}{24}.$$

Җавап: $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$.

2 нче мисал. $x^2 - 12x + 36 = 0$ тигезләмәсен чишик.

▶ Табабыз:

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0,$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2},$$

$$x = \frac{12 \pm 0}{2}.$$

Җавап: 6.

3 нче мисал. $7x^2 - 25x + 23 = 0$ тигезләмәсен чишик.

▶ Табабыз:

$$D = (-25)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 23 = 625 - 644,\ D < 0.$$

Җавап: тамырлары юк. ◁

Икенче коэффициенты җөп сан булган квадрат тигезләмәләр өчен тамырлар формуласын башкача язу уңай.

$$ax^2 + 2kx + c = 0$$

квадрат тигезләмәсен карыйк. Аның дискриминантын табабыз:

$$D = 4k^2 - 4ac = 4\ (k^2 - ac).$$

Тигезләмәнең тамырлар саны $k^2 - ac$ аңлатмасының тамгасына бәйле булуы үзеннән-үзе аңлашыла. Бу аңлатманы D_1 дип тамгалыйк.

Әгәр $D_1 \geq 0$ булса, квадрат тигезләмәнең тамырлары формуласы буенча табабыз:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},\ \text{ягъни}$$

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},\ \text{биредә}\ D_1 = k^2 - ac. \qquad \text{(II)}$$

Әгәр $D_1 < 0$ икән, тигезләмәнең тамырлары булмый.

[illegible] нче мисал. $9x^2 - 14x + 5 = 0$ тигезләмәсен чишик.

▶ Табабыз:

$$D_1 = (-7)^2 - 9 \cdot 5 = 4,$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{4}}{9}, x = \frac{7 \pm 2}{9}.$$

Җавап: $x_1 = \frac{5}{9}$, $x_2 = 1$. ◁

Күнегүләр

533 Квадрат тигезләмәнең дискриминантын исәпләп чыгарыгыз һәм тигезләмәнең тамырлары санын күрсәтегез:

а) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; в) $9x^2 + 6x + 1 = 0$;
б) $2x^2 + x + 2 = 0$; г) $x^2 + 5x - 6 = 0$.

534 Тигезләмәне чишегез:

а) $3x^2 - 7x + 4 = 0$; д) $5y^2 - 6y + 1 = 0$;
б) $5x^2 - 8x + 3 = 0$; е) $4x^2 + x - 33 = 0$;
в) $3x^2 - 13x + 14 = 0$; ж) $y^2 - 10y - 24 = 0$;
г) $2y^2 - 9y + 10 = 0$; з) $p^2 + p - 90 = 0$.

535 Тигезләмәне чишегез:

а) $14x^2 - 5x - 1 = 0$; г) $1 - 18p + 81p^2 = 0$;
б) $-y^2 + 3y + 5 = 0$; д) $-11y + y^2 - 152 = 0$;
в) $2x^2 + x + 67 = 0$; е) $18 + 3x^2 - x = 0$.

536 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз:

а) $5x^2 - 11x + 2 = 0$; г) $35x^2 + 2x - 1 = 0$;
б) $2p^2 + 7p - 30 = 0$; д) $2y^2 - y - 5 = 0$;
в) $9y^2 - 30y + 25 = 0$; е) $16x^2 - 8x + 1 = 0$.

537 x ның нинди кыйммәтләре өчен

а) $x^2 - 11x + 31$ өчбуыны 1 гә тигез булган кыйммәт ала;
б) $x^2 - 5x - 3$ һәм $2x - 5$ күпбуыннарының кыйммәтләре тигез;
в) $7x + 1$ икебуыны $3x^2 - 2x + 1$ өчбуынына тигез;
г) $-2x^2 + 5x + 6$ өчбуыны $4x^2 + 5x$ икебуынына тигез?

538 x ның нинди кыйммәтләре өчен

а) $x^2 - 6x$ һәм $5x - 18$ икебуыннары;
б) $3x^2 - 4x + 3$ һәм $x^2 + x + 1$ өчбуыннары тигез кыйммәтләр ала?

539 (II) формуласын кулланып, тигезләмәне чишегез:

а) $3x^2 - 14x + 16 = 0$; д) $4x^2 - 36x + 77 = 0$;
б) $5x^2 - 16x + 3 = 0$; е) $15y^2 - 22y - 37 = 0$;
в) $x^2 + 2x - 80 = 0$; ж) $7z^2 - 20z + 14 = 0$;
г) $x^2 - 22x - 23 = 0$; з) $y^2 - 10y - 25 = 0$.

540 Тигезләмәне чишегез:

а) $8x^2 - 14x + 5 = 0$;
б) $12x^2 + 16x - 3 = 0$;
в) $4x^2 + 4x + 1 = 0$;
г) $x^2 - 8x - 84 = 0$;
д) $x^2 + 6x - 19 = 0$;
е) $5x^2 + 26x - 24 = 0$;
ж) $x^2 - 34x + 289 = 0$;
з) $3x^2 + 32x + 80 = 0$.

541 Тигезләмәне чишегез:

а) $2x^2 - 5x - 3 = 0$;
б) $3x^2 - 8x + 5 = 0$;
в) $5x^2 + 9x + 4 = 0$;
г) $36y^2 - 12y + 1 = 0$;
д) $3t^2 - 3t + 1 = 0$;
е) $x^2 + 9x - 22 = 0$;
ж) $y^2 - 12y + 32 = 0$;
з) $100x^2 - 160x + 63 = 0$.

542 Тигезләмәне чишегез:

а) $5x^2 = 9x + 2$;
б) $-x^2 = 5x - 14$;
в) $6x + 9 = x^2$;
г) $z - 5 = z^2 - 25$;
д) $y^2 = 52y - 576$;
е) $15y^2 - 30 = 22y + 7$;
ж) $25p^2 = 10p - 1$;
з) $299x^2 + 100x = 500 - 101x^2$.

543 Тигезләмәне чишегез:

а) $25 = 26x - x^2$;
б) $3x^2 = 10 - 29x$;
в) $y^2 = 4y + 96$;
г) $3p^2 + 3 = 10p$;
д) $x^2 - 20x = 20x + 100$;
е) $25x^2 - 13x = 10x^2 - 7$.

544 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз:

а) $(2x - 3)(5x + 1) = 2x + \frac{2}{5}$;
б) $(3x - 1)(x + 3) = x(1 + 6x)$;
в) $(x - 1)(x + 1) = 2\left(5x - 10\frac{1}{2}\right)$;
г) $-x(x + 7) = (x - 2)(x + 2)$.

545 Тигезләмәне чишегез:

а) $(x + 4)^2 = 3x + 40$;
б) $(2x - 3)^2 = 11x - 19$;
в) $(x + 1)^2 = 7918 - 2x$;
г) $(x + 2)^2 = 3131 - 2x$.

546 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз:

а) $3(x + 4)^2 = 10x + 32$;
б) $15x^2 + 17 = 15(x + 1)^2$;
в) $(x + 1)^2 = (2x - 1)^2$;
г) $(x - 2)^2 + 48 = (2 - 3x)^2$.

547 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз:

а) $\frac{x^2-1}{2} - 11x = 11$;
б) $\frac{x^2+x}{2} = \frac{8x-7}{3}$;
в) $\frac{4x^2-1}{3} = x(10x - 9)$;
г) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{5}x = \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{4}$.

548 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз һәм аларның якынча кыйммәтләрен 0,01 гә кадәр төгәллек белән унарлы вакланмалар рәвешендә күрсәтегез:

а) $5x^2 - x - 1 = 0$;
б) $2x^2 + 7x + 4 = 0$;
в) $3(y^2 - 2) - y = 0$;
г) $y^2 + 8(y - 1) = 3$.

549 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз һәм аларның якынча кыйммәтләрен 0,01 гә кадәр төгәллек белән унарлы вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $x^2 - 8x + 9 = 0$; б) $2y^2 - 8y + 5 = 0$.

550 Тигезләмәне чишегез:

а) $0,7x^2 = 1,3x + 2$; г) $z^2 - 2z + 2,91 = 0$;
б) $7 = 0,4y + 0,2y^2$; д) $0,2y^2 - 10y + 125 = 0$;
в) $x^2 - 1,6x - 0,36 = 0$; е) $\frac{1}{3}x^2 + 2x - 9 = 0$.

551 x ның нинди кыйммәтләре өчен тигезлек дөрес:

а) $\frac{1}{7}x^2 = 2x - 7$; б) $x^2 + 1,2 = 2,6x$; в) $4x^2 = 7x + 7,5$?

552 a ның тигезлекне дөрес итәрдәй кыйммәте бармы (булса, ул кыйммәтне табыгыз):

а) $3a + 0,6 = 9a^2 + 0,36$; б) $0,4a + 1,2 = 0,16a^2 + 1,44$?

Кабатлау өчен күнегүләр

553 а) $x = -0,5$ булганда, $\frac{x+1}{2x-2} - \frac{x-1}{2x+2} - \frac{2}{1-x^2}$;

б) $a = -1,5$ булганда, $\frac{a - \frac{2a-1}{a}}{\frac{1-a}{3a}}$

аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

554 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $(\sqrt{21} + \sqrt{14} - 2\sqrt{35}) \cdot \frac{\sqrt{7}}{7} + \sqrt{20}$;

б) $(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{15})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \sqrt{75}$.

555 Төзүне эшләми генә, сызыкча функцияләрнең графиклары кисешү нокталарының координаталарын табыгыз:

а) $y = 7x - 1$ һәм $y = 2x$; б) $y = 3x - 11$ һәм $y = 4$.

22. Квадрат тигезләмәләр ярдәмендә мәсьәләләр чишү

Математикада, физикада, техникада күп кенә мәсьәләләр квадрат тигезләмәләр ярдәмендә чишелә.

[illegible]нче мәсьәлә Турыпочмаклы өчпочмакта катетларның берсе икенчесеннән 4 см га кыскарак, ә гипотенузасы 20 см га тигез икәне билгеле булса, өчпочмакның катетларын табыгыз.

▶ Кечкенә катет x см га тигез булсын. Ул вакытта зуррак катет $(x + 4)$ см га тигез. Пифагор теоремасы буенча гипотенузаның квадраты катетларның квадратлары суммасына тигез, ягъни

$$x^2 + (x + 4)^2 = 20^2.$$

Табылган тигезләмәне гадиләштерәбез:

$$x^2 + x^2 + 8x + 16 = 400,$$
$$2x^2 + 8x - 384 = 0,$$
$$x^2 + 4x - 192 = 0.$$

Моннан $x_1 = -16$, $x_2 = 12$ икәнен табабыз.

Мәсьәләнең мәгънәсе буенча x ның кыйммәте уңай сан булырга тиеш. Бу шартны икенче тамыр гына канәгатьләндерә, ягъни 12 саны.

Җавап: 12 см, 16 см. ◁

[illegible] нче мәсьәлә Җисем 40 м/с башлангыч тизлек белән вертикаль рәвештә югары ыргытылган. Ничә секундтан соң җисем 60 м биеклектә булыр?

▶ Физика курсыннан билгеле булганча, әгәр һава каршылыгын исәпкә алмасак, вертикаль рәвештә югары ыргытылган җисемнең t секундтан соңгы биеклеген h (метрларда) түбәндәге формула буенча табарга мөмкин:

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

биредә v_0 — башлангыч тизлек (м/с ларда), g — тоткарсыз төшү тизләнеше, якынча 10 м/с^2 ка тигез.

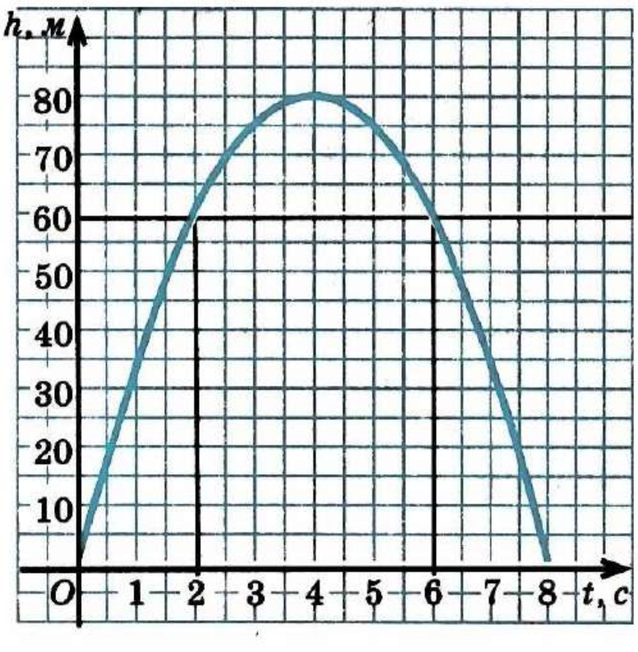
Формулага h һәм v_0 кыйммәтләрен куеп табабыз:

$$60 = 40t - 5t^2.$$

Моннан

$$5t^2 - 40t + 60 = 0,$$
$$t^2 - 8t + 12 = 0.$$

Табылган квадрат тигезләмәне чишеп, $t_1 = 2$, $t_2 = 6$ икәнен табабыз.



Рәс. 18

18 нче рәсемдә h ның t га бәйлелеге графигы бирелгән, биредә $h = 40t - t^2$. Графиктан күренгәнчә, вертикаль рәвештә югары ыргытылган җисем беренче 4 с эчендә 80 м биеклеккә күтәрелә, ә аннары түбән төшә башлый. Җисем җирдән 60 м биеклектә ике тапкыр була: ыргытылганнан соң 2 с үткәч һәм 6 с үткәч.

Мәсьәләнең шартын табылган тамырларның икесе дә канәгатьләндерә. Димәк, мәсьәләнең соравына мондый җавап биреп була: җисем 60 м биеклектә 2 с һәм 6 с үткәч була. ◁

Күнегүләр

556 Берсе икенчесеннән 6 га зур булган ике натураль санның тапкырчыгышы 187 гә тигез. Бу саннарны табыгыз.

557 120 санын берсе икенчесеннән 2 гә кечерәк булган ике санның тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтегез.

558 Турыпочмаклыкның буе иңеннән 4 см га озынрак, ә мәйданы 60 см^2 га тигез. Турыпочмаклыкның периметрын табыгыз.

559 Бер ягы икенчесеннән 10 м га озынрак булган турыпочмаклык формасындагы бакчаны койма белән әйләндереп алырга кирәк. Әгәр бакчаның мәйданы 1200 м^2 булса, койманың озынлыгын табыгыз.

560 Турыпочмаклыкның периметры 62 м га тигез. Әгәр турыпочмаклыкның мәйданы 210 м^2 булса, аның якларын табыгыз.

561 Әгәр турыпочмаклы өчпочмакның катетлары суммасы 23 см, ә өчпочмакның мәйданы 60 см^2 булса, бу өчпочмакның катетларын табыгыз.

562 Эзлекле килүче ике натураль санның тапкырчыгышы аларның суммасыннан 109 га зуррак. Бу натураль саннарны табыгыз.

563 Квадрат формасындагы картоннан 3 см киңлегендәге тасма кисеп алдылар. Шуннан соң калган турыпочмаклы кисәкнең мәйданы 70 см^2 була. Картонның баштагы үлчәнешләрен табыгыз.

564 Турыпочмаклык формасындагы тактаның мәйданы 4500 см^2. Тактаны, берсе квадрат, икенчесе турыпочмаклык булырлык итеп, ике кисәккә кискәннәр. Кисеп алынган турыпочмаклыкның буе 120 см булса, квадратның ягын табыгыз.

565 Әгәр турыпочмаклыкның бер ягы икенчесеннән 14 см га озынрак, ә диагонале 34 см га тигез булса, турыпочмаклыкның якларын табыгыз.

566 Турыпочмаклы өчпочмакның бер катеты гипотенузадан 3 см га кыскарак, ә икенче катеты гипотенузадан 6 см га кыскарак. Гипотенузаны табыгыз.

567 Кинотеатрда бер рәттәге урыннар саны рәтләр саныннан 8 гә күбрәк. Барлыгы 884 урын булса, анда ничә рәт бар?

568 Эзлекле килүче өч бөтен санның квадратлары суммасы 869 га тигез булса, бу саннарны табыгыз.

Кабатлау өчен күнегүләр

569 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{8a^3-27}{9-12a+4a^2}$; б) $\frac{ax-2x-4a+8}{3a-6-ax+2x}$.

570 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $a = 5$ һәм $b = 2$ булганда, $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-b}{2\sqrt{ab}+2b+1}$ нең;

б) $x = 4$ һәм $y = 6$ булганда, $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+4\sqrt{xy}}{x+\sqrt{xy}+1}$ нең.

571 Тигезләмәне чишегез:

а) $\frac{x(x-3)}{6}-\frac{x}{2}=0$; б) $\frac{x(x+1)}{3}+\frac{8+x}{4}=2$.

572 Төзүне эшләми генә, $y = 13x - 2{,}6$ функциясе графигының x һәм y күчәрләре белән кисешү нокталарын табыгыз.

23. Виет теоремасы

$x^2 - 7x + 10 = 0$ китерелгән квадрат тигезләмәсенең тамырлары 2 һәм 5 була. Бу тамырларның суммасы 7 гә, ә аларның тапкырчыгышы 10 га тигез. Без тамырларның суммасы капма-каршы тамгасы белән алынган икенче коэффициентка, ә тамырларның тапкырчыгышы ирекле буынга тигез икәнлеген күрәбез. Тамырлары булган теләсә нинди китерелгән квадрат тигезләмәнең шушы үзлеккә ия булуын исбатлыйк.

Теорема

Китерелгән квадрат тигезләмәнең тамырлары суммасы капма-каршы тамгасы белән алынган икенче коэффициентка, ә тамырларының тапкырчыгышы ирекле буынга тигез.

● Китерелгән квадрат тигезләмәне тикшерәбез. Икенче коэффициентны p хәрефе белән, ә ирекле буынны q хәрефе белән тамгалыйбыз:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Бу тигезләмәнең дискриминанты $D = p^2 - 4q$. $D > 0$ булсын. Ул вакытта тигезләмәнең ике тамыры бар:

$$x_1 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} \quad \text{һәм} \quad x_2 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2}.$$

Тамырларның суммасын һәм тапкырчыгышын табабыз:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} + \frac{-p+\sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p+\sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2-(\sqrt{D})^2}{4} =$$

$$= \frac{p^2-(p^2-4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Шулай итеп,

$$x_1 + x_2 = -p \text{ һәм } x_1 \cdot x_2 = q.$$ ○

$D = 0$ булганда, $x^2 + px + q = 0$ квадрат тигезләмәсенең бер тамыры бар. $D = 0$ булганда, квадрат тигезләмәнең ике тигез тамыры була дип исәпләргә шарт куйсак, теорема әлеге очрак өчен дә дөрес була. Бу $D = 0$ булганда, тигезләмәнең тамырларын шулай ук

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$$

формуласы буенча исәпләп булудан килеп чыга.

Әле исбатлаган теорема күренекле француз математигы Франсуа Виет хөрмәтенә Виет теоремасы дип йөртелә.

Виет теоремасыннан файдаланып, ирекле квадрат тигезләмәнең тамырлары суммасын һәм тапкырчыгышын аның коэффициентлары аша күрсәтергә була.

$ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамырлары x_1 һәм x_2 булсын. Аңа тамырдаш булган китерелгән квадрат тигезләмә түбәндәге рәвештә булыр:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Виет теоремасы буенча

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Виет теоремасына кире теорема да дөрес.

Теорема

Әгәр m һәм n саннарының суммасы $-p$ га, ә тапкырчыгышы q га тигез булса, бу саннар $x^2 + px + q = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамырлары була.

● Шарт буенча $m + n = -p$, ә $mn = q$. Димәк, $x^2 + px + q = 0$ тигезләмәсен

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0$$

рәвешендә язып була.

x урынына m санын куеп табабыз:

$$m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0.$$

Димәк, m саны тигезләмәнең тамыры була.

n саны шулай ук тигезләмәнең тамыры булуын аналогик рәвештә күрсәтергә мөмкин. ○

Виет теоремасын һәм Виет теоремасына кире теореманы куллануга мисаллар карыйк.

1 нче мисал. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ тигезләмәсенең тамырлары суммасын һәм тапкырчыгышын табабыз.

▶ $D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$ дискриминанты — уңай сан. Димәк, тигезләмәнең тамырлары бар. $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$ китерелгән квадрат тигезләмәсенең дә тамырлары шул ук. Димәк, $3x^2 - 5x + 2 = 0$ тигезләмәсенең тамырлары суммасы шулай ук $\frac{5}{3}$ кә, ә тапкырчыгышы $\frac{2}{3}$ гә тигез. ◁

Виет теоремасына кире теорема буенча квадрат тигезләмәнең тамырлары дөреслеген тикшерергә була.

2 нче мисал. $x^2 + 3x - 40 = 0$ тигезләмәсен чишик һәм Виет теоремасына кире теорема буенча дөреслеген тикшерик.

▶ Дискриминантны табабыз:

$$D = 3^2 + 4 \cdot 40 = 169.$$

Квадрат тигезләмәнең тамырлары формуласы буенча табабыз:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2},$$

$$x = \frac{-3 \pm 13}{2}.$$

Моннан

$$x_1 = -8, \quad x_2 = 5.$$

Тигезләмәнең тамырлары дөрес табылган булуын күрсәтик. $x^2 + 3x - 40 = 0$ тигезләмәсендә p коэффициенты 3 кә тигез, ә q ирекле буыны -40 ка тигез. Табылган -8 һәм 5 саннарының суммасы -3 кә, ә аларның тапкырчыгышы -40 ка тигез. Димәк, Виет теоремасына кире теорема буенча, бу саннар $x^2 + 3x - 40 = 0$ тигезләмәсенең тамырлары була. ◁

ФРАНСУА ВИЕТ (1540—1603)

— француз математигы, алгебраик символлар системасын кертә, элементар алгебра нигезләрен эшкәртә. Ул беренчеләрдән булып саннарны хәрефләр белән тамгалый башлый, моның тигезләмәләр теориясен үстерүгә әһәмияте зур була.

8 нче мисал. $x^2 - x - 12 = 0$ тигезләмәсенең тамырларын сайлап алу юлы белән табабыз:

▶ x_1 һәм x_2 тигезләмәнең тамырлары булсын. Ул вакытта

$$x_1 + x_2 = 1 \text{ һәм } x_1 \cdot x_2 = -12.$$

Әгәр x_1 һәм x_2 бөтен сан булса, алар -12 санының бүлүчеләре була. Шулай ук бу саннарның суммасы 1 гә тигез икәнен исәпкә алсак, $x_1 = -3$ һәм $x_2 = 4$ икәнен аңлавы кыен түгел. ◁

Күнегүләр

573 Тигезләмәнең тамырлары суммасын һәм тапкырчыгышын табыгыз:

а) $x^2 - 37x + 27 = 0$;
б) $y^2 + 41y - 371 = 0$;
в) $x^2 - 210x = 0$;
г) $y^2 - 19 = 0$;
д) $2x^2 - 9x - 10 = 0$;
е) $5x^2 + 12x + 7 = 0$;
ж) $-z^2 + z = 0$;
з) $3x^2 - 10 = 0$.

574 Тигезләмәне чишегез һәм Виет теоремасына кире теорема буенча дөреслеген тикшерегез:

а) $x^2 - 2x - 9 = 0$;
б) $3x^2 - 4x - 4 = 0$;
в) $2x^2 + 7x - 6 = 0$;
г) $2x^2 + 9x + 8 = 0$.

575 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз һәм Виет теоремасына кире теорема буенча дөреслеген тикшерегез:

а) $x^2 - 15x - 16 = 0$;
б) $x^2 - 6x - 11 = 0$;
в) $12x^2 - 4x - 1 = 0$;
г) $x^2 - 6 = 0$;
д) $5x^2 - 18x = 0$;
е) $2x^2 - 41 = 0$.

576 Тигезләмәнең тамырларын сайлап табыгыз:

а) $x^2 - 9x + 20 = 0$;
б) $x^2 + 11x - 12 = 0$;
в) $x^2 + x - 56 = 0$;
г) $x^2 - 19x + 88 = 0$.

577 Тигезләмәнең тамырларын сайлап табыгыз:

а) $x^2 + 16x + 63 = 0$;
б) $x^2 + 2x - 48 = 0$.

578 $x^2 + px - 35 = 0$ тигезләмәсендә тамырларның берсе 7 гә тигез. Икенче тамырны һәм p коэффициентын табыгыз.

579 $x^2 - 13x + q = 0$ тигезләмәсендә тамырларның берсе 12,5 кә тигез. Икенче тамырны һәм q коэффициентын табыгыз.

580 $5x^2 + bx + 24 = 0$ тигезләмәсендә тамырларның берсе 8 гә тигез. Икенче тамырны һәм b коэффициентын табыгыз.

581 $10x^2 - 33x + c = 0$ тигезләмәсендә тамырларның берсе 5,3 кә тигез. Икенче тамырны һәм c коэффициентын табыгыз.

582 $x^2 - 12x + q = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамырлары аермасы 2 гә тигез. q ны табыгыз.

583 $x^2 + x + c = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамырлар аермасы 6 га тигез. c ны табыгыз.

584 Түбәндәге тигезләмәләрнең бердәй тамгалы тамырлары булмавын исбатлагыз:

а) $3x^2 + 113x - 7 = 0$; б) $5x^2 - 291x - 16 = 0$.

585 Тигезләмәне чишми генә, аның тамырлары барлыгын ачыклагыз, әгәр булса, аларның тамгаларын билгеләгез:

а) $x^2 + 7x - 1 = 0$; г) $19x^2 - 23x + 5 = 0$;

б) $x^2 - 7x + 1 = 0$; д) $2x^2 + 5\sqrt{3}\,x + 11 = 0$;

в) $5x^2 + 17x + 16 = 0$; е) $11x^2 - 9x + 7 - 5\sqrt{2} = 0$.

586 Тигезләмәне чишми генә, аның тамырларының (әгәр алар булса) тамгаларын билгеләгез:

а) $x^2 - 18x + 17 = 0$; г) $5x^2 - x - 108 = 0$;

б) $x^2 - 2x - 1 = 0$; д) $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$;

в) $x^2 - 15x + 56 = 0$; е) $\sqrt{3}x^2 - 12 - 7\sqrt{3} = 0$.

Кабатлау өчен күнегүләр

587 x ның нинди кыйммәтләре өчен тигезлек дөрес була:

а) $(3x + 1)^2 = 3x + 1$; г) $(3x + 4)^2 = 4(x + 3)$;

б) $(3x + 1)^2 = 3(x + 1)$; д) $4(x + 3)^2 = (2x + 6)^2$;

в) $(3x + 1)^2 = (2x - 5)^2$; е) $(6x + 3)^2 = (x - 4)^2$?

588 Турыпочмаклы өчпочмакның катетлары чагыштырмасы $8 : 15$ кә, ә гипотенузасы 6,8 м га тигез. Өчпочмакның мәйданын табыгыз.

589 Турыпочмаклы өчпочмакта гипотенузаның катетларының берсенә чагыштырмасы $\frac{13}{12}$ кә, икенче катеты 15 см га тигез. Өчпочмакның периметрын табыгыз.

Контроль сораулар

1 Квадрат тигезләмәнең дискриминанты дип нәрсәне атыйлар? Квадрат тигезләмәнең ничә тамыры булырга мөмкин?

2 Квадрат тигезләмәнең тамырлары формуласын языгыз.

3 Икенче коэффициенты җөп сан булган квадрат тигезләмәнең тамырлары формуласын языгыз.

4 Виет теоремасын әйтеп бирегез һәм исбатлагыз. $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамырлары суммасы һәм тапкырчыгышы нәрсәгә тигез?

5 Виет теоремасына кире теореманы әйтеп бирегез һәм исбатлагыз.

§ 10. Вакланмалы рациональ тигезләмәләр

24. Вакланмалы рациональ тигезләмәләрне чишү

$$2x + 5 = 3(8 - x),$$

$$x - \frac{5}{x} = -3x + 19,$$

$$\frac{x-4}{2x+1} = \frac{x-9}{x}$$

тигезләмәләренең сул һәм уң кисәкләре — рациональ аңлатмалар. Андый тигезләмәләрне *рациональ тигезләмәләр* дип атыйлар. Сул һәм уң кисәкләре бөтен аңлатмалар булган рациональ тигезләмәне *бөтен* тигезләмә дип атыйлар. Сул һәм уң кисәкләре *вакланмалы* аңлатмалар булган рациональ тигезләмәне *вакланмалы* тигезләмә дип атыйлар. $2x + 5 = 3(8 - x)$ тигезләмәсе — бөтен, ә $x - \frac{5}{x} = -3x + 19$ һәм $\frac{x-4}{2x+1} = \frac{x-9}{x}$ тигезләмәләре — вакланмалы рациональ тигезләмәләр.

1 нче мисал $\frac{x-1}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{5x}{6}$ бөтен тигезләмәсен чишик.

▶ Тигезләмәнең ике кисәген дә аның вакланмаларына кергән иң кечкенә уртак ваклаучыга, ягъни 6 санына тапкырлыйбыз. Вакланмаларны эченә алмаган һәм бирелгәнгә тамырдаш булган тигезләмә табабыз:

$$3(x - 1) + 4x = 5x.$$

Аны чишеп, $x = 1{,}5$ икәнен табабыз. ◁

2 нче мисал

$$\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)} \quad (1)$$

вакланмалы рациональ тигезләмәсен чишик.

▶ Алдагы мисалны чишкәндәге кебек тигезләмәнең ике кисәген дә вакланмаларның уртак ваклаучысына, ягъни $x(x - 5)$ аңлатмасына тапкырлыйбыз.

$$x(x-3) + x - 5 = x + 5 \quad (2)$$

бөтен тигезләмәсен табабыз.

(1) тигезләмәсенең һәрбер тамыры (2) тигезләмәсенең дә тамыры икәне үзеннән-үзе аңлашыла. Ләкин (2) тигезләмәсе баштагы тигезләмәгә тамырдаш булмаска да мөмкин, чөнки без аның ике кисәген дә нульдән үзгә булган санга түгел, ә нульгә әйләнергә мөмкин булган үзгәрешлене эченә алган аңлатмага тапкырладык. Шуңа күрә (2) тигезләмәсенең һәр тамыры да (1) тигезләмәсенең тамыры булмаска да мөмкин.

(2) тигезләмәсен гадиләштереп,

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

квадрат тигезләмәсен табабыз.

Аның тамырлары −2 һәм 5 саннары.

−2 һәм 5 саннары (1) тигезләмәсенең тамырлары буламы икәнен тикшерәбез.

$x = -2$ булганда, $x(x-5)$ уртак ваклаучысы нульгә әйләнми. Димәк, −2 саны — (1) тигезләмәсенең тамыры.

$x = 5$ булганда, уртак ваклаучы нульгә әйләнә һәм $\frac{x-3}{x-5}$ һәм $\frac{x+5}{x(x-5)}$ аңлатмаларының мәгънәсе булмый. Шуңа күрә 5 саны (1) тигезләмәсенең тамыры түгел.

Шулай итеп, −2 саны гына (1) тигезләмәсенең тамыры булып хезмәт итә. ◁

Гомумән, вакланмалы тигезләмәләрне түбәндәге тәртиптә чишү яхшырак:

1) тигезләмәгә кергән вакланмаларның уртак ваклаучысын табарга;

2) тигезләмәнең ике кисәген дә уртак ваклаучыга тапкырларга;

3) килеп чыккан бөтен тигезләмәне чишәргә;

4) аның тамырлары арасыннан уртак ваклаучыны нульгә әйләндерә торганнарын төшереп калдырырга кирәк.

8 нче мисал $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x}$ тигезләмәсен чишик.

▶ Табабыз:

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x(x-2)} = \frac{4-x}{x(x+2)} \text{ була.}$$

Вакланмаларның уртак ваклаучысы: $x(x-2)(x+2)$. Аннары табабыз:

$$2x - (x+2) = (x-2)(4-x),$$
$$2x - x - 2 = 4x - x^2 - 8 + 2x,$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$
$$D = 25 - 24 = 1,$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2},$$
$$x = \frac{5 \pm 1}{2},$$
$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

Әгәр $x = 2$ булса, $x(x-2)(x+2) = 0$ була; әгәр $x = 3$ булса, $x(x-2)(x+2) \neq 0$.

Җ а в а п: 3. ◁

Күнегүләр

590 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз.

а) $\frac{y^2}{y+3}=\frac{y}{y+3}$;

б) $\frac{x^2}{x^2-4}=\frac{5x-6}{x^2-4}$;

в) $\frac{2x^2}{x-2}=\frac{-7x+6}{2-x}$;

г) $\frac{y^2-6y}{y-5}=\frac{5}{5-y}$;

д) $\frac{2x-1}{x+7}=\frac{3x+4}{x-1}$;

е) $\frac{2y+3}{2y-1}=\frac{y-5}{y+3}$;

ж) $\frac{5y+1}{y+1}=\frac{y+2}{y}$;

з) $\frac{1+3x}{1-3x}=\frac{5-3x}{1+2x}$;

и) $\frac{x-1}{2x+3}-\frac{2x-1}{3-2x}=0$.

591 Тигезләмәне чишегез:

а) $\frac{2x-5}{x+5}-4=0$;

б) $\frac{12}{7-x}=x$;

в) $\frac{x^2-4}{4}=\frac{3+2x}{2}$;

г) $\frac{10}{2x-3}=x-1$;

д) $\frac{8}{x}=3x+2$;

е) $\frac{x^2+4x}{x+2}=\frac{2x}{3}$;

ж) $\frac{2x^2-5x+3}{10x-5}=0$;

з) $\frac{4x^3-9x}{x+1{,}5}=0$.

592 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз:

а) $\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{7x}{x^2+1}$;

б) $\frac{y^2}{y^2-6y}=\frac{4(3-2y)}{y(6-y)}$;

в) $\frac{x-2}{x+2}=\frac{x+3}{x-4}$;

г) $\frac{8y-5}{y}=\frac{9y}{y+2}$;

д) $\frac{x^2+3}{x^2+1}=2$;

е) $\frac{3}{x^2+2}=\frac{1}{x}$;

ж) $x+2=\frac{15}{4x+1}$;

з) $\frac{x^2-5}{x-1}=\frac{7x+10}{9}$.

593 Тигезләмәне чишегез:

а) $\frac{3x+1}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}=1$;

б) $\frac{2y-2}{y+3}+\frac{y+3}{y-3}=5$;

в) $\frac{4}{9y^2-1}-\frac{4}{3y+1}=\frac{5}{1-3y}$;

г) $\frac{4}{x+3}-\frac{5}{3-x}=\frac{1}{x-3}-1$;

д) $\frac{3}{x}+\frac{4}{x-1}=\frac{5-x}{x^2-x}$;

е) $\frac{3y-2}{y}-\frac{1}{y-2}=\frac{3y+4}{y^2-2y}$.

594 x ның нинди кыйммәте өчен

а) $y=\frac{2x-1}{x+6}$ функциясенең кыйммәте 5; −3; 0; 2 гә тигез;

б) $y=\frac{x^2+x-2}{x+3}$ функциясенең кыйммәте −10; 0; −5 кә тигез?

595 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз:

а) $\frac{x-4}{x-5}+\frac{x-6}{x+5}=2$;

б) $\frac{1}{2-x}-1=\frac{1}{x-2}-\frac{6-x}{3x^2-12}$;

в) $\frac{7y-3}{y-y^2}=\frac{1}{y-1}-\frac{5}{y(y-1)}$;

г) $\frac{3}{y-2}+\frac{7}{y+2}=\frac{10}{y}$;

д) $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=3\frac{1}{3}$;

е) $\frac{5x+7}{x-2}-\frac{2x+21}{x+2}=8\frac{2}{3}$.

596 y үзгәрешлесенең кыйммәтен табыгыз:

а) $\frac{3y+9}{3y-1}$ һәм $\frac{2y-13}{2y+5}$ вакланмаларының суммасы 2 гә тигез;

б) $\frac{5y+13}{5y+4}$ һәм $\frac{4-6y}{3y-1}$ вакланмаларының аермасы 3 кә тигез;

в) $\frac{y+1}{y-5}$ һәм $\frac{10}{y+5}$ вакланмаларының суммасы аларның тапкырчыгышына тигез;

г) $\frac{6}{y-4}$ һәм $\frac{y}{y+2}$ вакланмаларының аермасы аларның тапкырчыгышына тигез.

597 Тигезләмәне чишегез:

а) $\frac{5}{y-2}-\frac{4}{y-3}=\frac{1}{y}$;

б) $\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{x+2}=\frac{3}{x+3}$;

в) $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{8}{x^3-4x}$;

г) $\frac{10}{y^3-y}+\frac{1}{y-y^2}=\frac{1}{1+y}$;

д) $1+\frac{45}{x^2-8x+16}=\frac{14}{x-4}$;

е) $\frac{5}{x-1}-\frac{4}{3-6x+3x^2}=3$.

598 Тигезләмәне чишегез:

а) $\frac{10}{(x-5)(x+1)}+\frac{x}{x+1}=\frac{3}{x-5}$;

б) $\frac{17}{(x-3)(x+4)}-\frac{1}{x-3}=\frac{x}{x+4}$;

в) $\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2-1}=0$;

г) $\frac{4}{9x^2-1}+\frac{1}{3x^2-x}=\frac{4}{9x^2-6x+1}$.

599 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз:

а) $\frac{21}{x+1}=\frac{16}{x-2}-\frac{6}{x}$;

б) $\frac{2}{y^2-3y}-\frac{1}{y-3}=\frac{5}{y^3-9y}$;

в) $\frac{18}{4x^2+4x+1}-\frac{1}{2x^2-x}=\frac{6}{4x^2-1}$.

Кабатлау өчен күнегүләр

600 $x = 3 + \sqrt{5}$, $y = 3 - \sqrt{5}$ булганда, $x^2 - 2xy + y^2$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

601 $A(1{,}5;\ 7{,}25)$ ноктасы; $B(-3{,}2;\ 9)$ ноктасы; $C(\sqrt{3} - 1;\ 7)$ ноктасы $y = x^2 + 2x + 5$ функциясенең графигында ятамы?

602 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \sqrt{x}$; б) $\sqrt{x} - \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

603 Аңлатманың кыйммәтен нуль белән чагыштырыгыз:

а) $\frac{3ab}{a^2+b^2}$, биредә $a > 0$, $b < 0$;

б) $\frac{5a^3b^2}{a+b}$, биредә $a < 0$, $b < 0$.

25. Рациональ тигезләмәләр ярдәмендә мәсьәләләр чишү

Күп кенә мәсьәләләрне чишкәндә, вакланмалы рациональ тигезләмәләр килеп чыга.

Түбәндәге мәсьәләне карыйк: «Моторлы көймә, елга агымы уңаена 25 км һәм агымга каршы 3 км барып, барлык юлны 2 сәг тә үткән. Елга агымының тизлеге 3 км/сәг булса, торгын суда көйменең тизлеге күпме булыр?»

x км/сәг — көйменең торгын судагы тизлеге булсын. Ул вакытта көйменең агым уңаена тизлеге $(x + 3)$ км/сәг, агымга каршы тизлеге $(x - 3)$ км/сәг була.

Көймә агым уңаена 25 км юл үтә һәм бу юлны үтү өчен $\frac{25}{x+3}$ сәг вакыт сарыф итә, ә агымга каршы 3 км үтә һәм $\frac{3}{x-3}$ сәг вакыт үткәрә. Димәк, барлык юл өчен киткән вакыт $\left(\frac{25}{x+3} + \frac{3}{x-3}\right)$ сәг кә тигез.

Мәсьәләнең шарты буенча көймә барлык юлны 2 сәг тә үткән. Димәк,

$$\frac{25}{x+3} + \frac{3}{x-3} = 2.$$

Бу тигезләмәне чишеп, аның тамырларын табыбыз: $x_1 = 2$ һәм $x_2 = 12$.

Мәсьәләнең мәгънәсе буенча көйменең торгын судагы тизлеге агым тизлегеннән зуррак булырга тиеш. Бу шартны икенче тамыр канәгатьләндерә, ә беренче тамыр канәгатьләндерми.

Җавап: 12 км/сәг.

Күнегүләр

604 Гади вакланманың санаучысы аның ваклаучысыннан 3 кә зуррак. Әгәр вакланманың санаучысына 7 не, ә ваклаучысына 5 не кушсак, вакланма $\frac{1}{2}$ гә зураер. Әлеге вакланманы табыгыз.

605 Кыскармый торган гади вакланманың санаучысы аның ваклаучысыннан 5 кә кечерәк. Бу вакланманың санаучысын 2 гә киметеп, ваклаучысын 16 га арттырсак, вакланма $\frac{1}{3}$ гә кечерәк булыр. Бу вакланманы табыгыз.

606 Шәһәрдән 120 км ераклыкта урнашкан авылга бер үк вакытта ике автомобиль чыга. Берсенең тизлеге икенчесенең тизлегенә караганда 20 км/сәг кә зуррак булганга күрә, ул билгеләнгән урынга 1 сәг кә алданрак барып җитә. Һәр автомобильнең тизлеген табыгыз.

607 *A* шәһәреннән *B* шәһәренә велосипедчы чыга. 1 сәг 36 мин тан соң аның артыннан мотоциклчы чыга һәм *B* шәһәренә велосипедчы белән бер үк вакытта килеп җитә. Әгәр дә шәһәрләр арасындагы ераклык 45 км га тигез булып, велосипедчының тизлеге мотоциклчының тизлегеннән 32 км/сәг кә кимрәк булса, велосипедчының тизлеген табыгыз.

608 Чаңгычыларның берсе 20 км араны икенчесенә караганда 20 мин ка тизрәк үткән. Әлеге чаңгычының 2 км/сәг кә зуррак тизлек белән барганын белеп, һәр чаңгычының тизлеген табыгыз.

609 Ике автомобиль бер үк вакытта бер шәһәрдән икенче шәһәргә чыгалар. Беренче автомобильнең тизлеге икенчесенең тизлегеннән 10 км/сәг кә артыграк һәм ул билгеләнгән урынга икенчесенә караганда 1 сәг кә алданрак килеп җитә. Шәһәрләр арасы 560 км икәне билгеле булса, һәр автомобильнең тизлеген табыгыз.

610 Поезд 1 сәг кә соңга калуын 720 км арада бетерү өчен, үзенең тизлеген, расписаниедәге тизлегенә караганда, 10 км/сәг кә арттырган. Поездның расписание буенча тизлеге күпме булган?

611 Турист көймәдә елга буйлап агымга каршы 6 км һәм күл буйлап 15 км юл үткән. Ул күл буйлап елгадагыга караганда 1 сәг кә озаграк бара. Елганың агым тизлеге 2 км/сәг икәне билгеле булганда, көймәнең күлдә барган тизлеген табыгыз.

612 Торгын судагы тизлеге 15 км/сәг булган моторлы көймә агым уңаена 35 км, агымга каршы 25 км юл үткән. Көймә агым уңаена агымга каршы баргандагы кадәр вакытта үткән. Елганың агым тизлеге күпме булган?

613 Торгын судагы тизлеге 20 км/сәг булган катер агымга каршы 36 км һәм агым уңаена 22 км араны 3 сәг тә үткән. Елганың агым тизлеген табыгыз.

614 Бер штукатурчы үзенең эшен икенчесенә караганда 5 сәгкә алданрак тәмамлый. Икесе бергә алар шул ук эшне 6 сәгтә башкаралар. Бу эшне аларның һәркайсы ничә сәгать башкара ала?

615 Ике эшче бер эшне 12 көндә тәмамлый. Әгәр эшчеләрнең берсенә бу эшне үзе генә башкару өчен икенчесенә караганда 10 көнгә артыграк вакыт кирәк булса, һәр эшче әлеге эшне ничә көн эшләр?

616 Ике бригада, бергә эшләп, йорттагы фатирларны буяу-агарту эшен 6 көндә тәмамлый. Әгәр бер бригада үзе генә эшләсә, аңа бу эшне башкарып чыгу өчен, икенче бригадага караганда 5 көнгә артыграк вакыт кирәк булыр иде. Һәр бригада үзе генә бу эшне ничә көн эшләр?

617 Аралары 720 км булган ике шәһәрдән бер-берсенә каршы ике поезд чыга, һәм алар юл уртасында очрашалар. Икенче поезд беренчесенә караганда 1 сәг кә соңрак чыга һәм аның тизлеге беренче поезд тизлегеннән 4 км/сәг кә артыграк була. Һәр поездның тизлеген табыгыз.

Кабатлау өчен күнегүләр

618 Тигезлекнең дөрес икәнен исбатлагыз:

а) $\frac{1}{11+2\sqrt{30}}+\frac{1}{11-2\sqrt{30}}=22$; б) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}+\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=18$.

619 а) $x=5+2\sqrt{6}$, $y=5-2\sqrt{6}$ булганда, $\frac{xy}{x+y}$ ның;

б) $x=\sqrt{11}+\sqrt{3}$, $y=\sqrt{11}-\sqrt{3}$ булганда, $\frac{x^2+y^2}{xy}$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

620 $x^2-10x+q=0$ тигезләмәсенең тамырлары аермасы 6 га тигез булырлык q ның кыйммәтен табыгыз.

621 Тамырлары

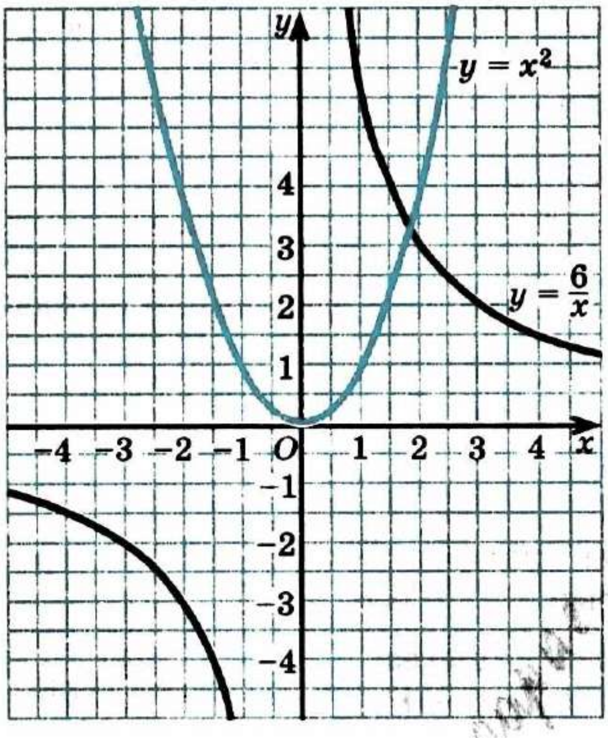
а) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ һәм $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; б) $2-\sqrt{3}$ һәм $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

булырлык итеп, квадрат тигезләмә төзегез.

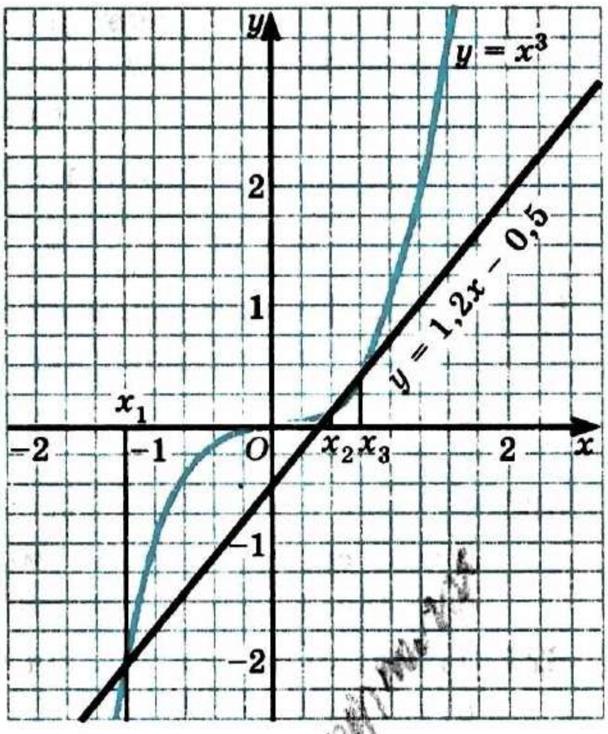
26. Тигезләмәләрне график юл белән чишү

$x^2=\frac{6}{x}$ тигезләмәсен тикшерик. Әгәр бу тигезләмәнең ике кисәген дә x ка тапкырласак, $x^3=6$ тигезләмәсен табарбыз, аның чишү ысулы безгә билгеле түгел. Шулай да графиклар ярдәмендә $x^2=\frac{6}{x}$ тигезләмәсе тамырларының якынча кыйммәтләрен табарга мөмкин.

$y=x^2$ һәм $y=\frac{6}{x}$ функцияләренең графикларын бер координаталар яссылыгында төзибез (рәс. 19). Бу графиклар бер ноктада үзара кисешәләр.



Рәс. 19



Рәс. 20

Кисешү ноктасының абсциссасы — x үзгәрешлесенең x^2 һәм $\frac{6}{x}$ аңлатмаларын тигез кыйммәтле итә торган кыйммәте ул. Димәк, $y = x^2$ һәм $y = \frac{6}{x}$ функцияләренең графиклары кисешкән ноктаның абсциссасы $x^2 = \frac{6}{x}$ тигезләмәсенең тамыры була. Рәсемнән күренгәнчә, тамырның якынча кыйммәте 1,8 гә тигез.

Тигезләмә чишүдә кулланылган ысулны *график ысул* дип атыйлар.

Тигезләмәне график ысул белән чишүгә тагын бер мисал карыйк. $x^3 - 1,2x + 0,5 = 0$ тигезләмәсен чишик. Бу тигезләмәне $x^3 = 1,2x - 0,5$ рәвешенә китерик һәм бер координаталар яссылыгында $y = x^3$ һәм $y = 1,2x - 0,5$ функцияләренең графикларын төзик (рәс. 20). Графиклар өч нокта кисешәләр. Бу исә, $x^3 = 1,2x - 0,5$ тигезләмәсенең, димәк $x^3 - 1,2x + 0,5 = 0$ тигезләмәсенең дә, өч тамыры булуын аңлата. Тамырларның якынча кыйммәтләрен, ягъни графиклар кисешкән ноктаның абсциссаларын таптык:

$$x_1 \approx -1,3; \; x_2 \approx 0,5; \; x_3 \approx 0,8.$$

Күнегүләр

622 $y = x^2$ функциясенең графигын төзегез һәм аннан файдаланып: а) $x^2 = x + 2$; б) $x^2 + 1,5x - 2,5 = 0$ тигезләмәсен чишегез.

623 Тигезләмәне башта график юл белән, ә аннан соң тамырлар формуласы ярдәмендә чишегез:

а) $x^2 = 0{,}5x + 3$; б) $x^2 - 3x + 2 = 0$.

624 Тигезләмәне график юл белән чишегез:

а) $\frac{8}{x} = -x + 6$; б) $\frac{8}{x} = x^2$.

625 $y = \frac{6}{x}$ функциясенең графигын төзегез һәм, аннан файдаланып, тигезләмәне чишегез:

а) $\frac{6}{x} = x$; б) $\frac{6}{x} = -x + 6$.

626 $\frac{1}{x} = ax + b$ тигезләмәсенең (биредә a һәм b — нинди дә булса саннар) ничә тамыры булырга мөмкин икәнен графиклар ярдәмендә ачыклагыз.

627 Тигезләмәне график юл белән чишегез:

а) $x^3 - x + 1 = 0$; б) $x^3 + 2x - 4 = 0$.

628 b ның төрле кыйммәтләре өчен:

а) $\sqrt{x} = x + b$; б) $\sqrt{x} = -x + b$

тигезләмәсенең ничә тамыры булырга мөмкин икәнен графиклар ярдәмендә ачыклагыз.

629 Тигезләмәне график юл белән чишегез:

а) $\sqrt{x} = 6 - x$; б) $\sqrt{x} = \frac{4}{x}$.

Кабатлау өчен күнегүләр

630 Туристлар билгеле бер вакытта 18 км юл үтәргә тиеш булалар. Ләкин алар уйлаганга караганда 0,5 км/сәг кә артыграк тизлек белән баралар, һәм шуңа күрә әлеге юлны ярты сәгатькә тизрәк үтәләр. Туристлар башта нинди тизлек белән барырга уйлаганнар?

631 Бригада билгеле бер срокта 120 га чәчәргә тиеш була. Ләкин планлаштырылган көнлек норманы көн саен 10 га га арттырып, чәчүне 2 көнгә алданрак төгәллиләр. Бригада көн саен ничә гектар чәчкән?

632 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; б) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

Контроль сораулар

1 Бөтен тигезләмәгә мисал һәм вакланмалы рациональ тигезләмәгә мисал китерегез.

2 Вакланмалы рациональ тигезләмәне ничек чишәләр, сөйләп бирегез.

III бүлеккә өстәмә күнегүләр

8 нче параграфка

633 Тигезләмәнең квадрат тигезләмәгә тамырдаш (тигезкөчле) икәнен исбатлагыз:

а) $(x-3)(x^2+3x+9)=x(x-8)(x+9)$;
б) $(y+7)(y^2-7y+49)-y(y+8)(y-7)=0$;
в) $(2x-1)(2x+1)+(x-3)^2=17$;
г) $(4x+1)^2-2x(x-6)-1=0$.

634 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз:

а) $y^2-36=0$; в) $-0{,}2y^2+45=0$;
б) $\frac{1}{3}y^2-\frac{8}{27}=0$; г) $-\frac{3}{7}y^2+2\frac{1}{3}=0$.

635 Тигезләмәне чишегез:

а) $8x^2-3x=0$; в) $x^3+x=0$;
б) $-2x^2+5x=0$; г) $2x^3-50x=0$.

636 Тигезләмәне чишегез:

а) $(x+2)^2+(x-3)^2=13$;
б) $(3x-5)^2-(2x+1)^2=24$;
в) $(x-4)(x^2+4x+16)+28=x^2(x-25)$;
г) $(2x+1)(4x^2-2x+1)-1=1{,}6x^2(5x-2)$.

637 Тигезләмәне x ка карата чишегез:

а) $x^2=a$; в) $x^2+4b=0$;
б) $x^2=a^2$; г) $x^2+9b^2=0$.

638 Икебуынның квадратын аерып чыгару алымын кулланып, тигезләмәне чишегез:

а) $x^2-16x+48=0$; д) $x^2+7x-18=0$;
б) $x^2+12x+27=0$; е) $x^2-11x+28=0$;
в) $x^2+10x-39=0$; ж) $2x^2-5x+2=0$;
г) $x^2-6x-55=0$; з) $3x^2-x-70=0$.

639 Үзгәрешленең теләсә нинди кыйммәте өчен аңлатманың кыйммәте уңай булуын исбатлагыз:

а) $a^2+4a+11$; в) $m^2-4m+51$;
б) $\frac{x^2-2x+7}{19}$; г) $\frac{p^2-6p+18}{p^2+1}$.

640 Икебуынның квадратын аерып чыгару алымын кулланып, а) $x^2-8x+27$ аңлатмасының иң кечкенә кыйммәте 11 саны икәнен исбатлагыз; б) $a^2-4a+20$ аңлатмасының иң кечкенә кыйммәтен табыгыз.

641 Тигезләмәне чишегез:

а) $4x^2 + 7x + 3 = 0$;
б) $x^2 + x - 56 = 0$;
в) $x^2 - x - 56 = 0$;
г) $5x^2 - 18x + 16 = 0$;
д) $8x^2 + x - 75 = 0$;
е) $3x^2 - 11x - 14 = 0$;
ж) $3x^2 + 11x - 34 = 0$;
з) $x^2 - x - 1 = 0$.

642 x ның нинди кыйммәтләре өчен тигезлек дөрес:

а) $(5x + 3)^2 = 5(x + 3)$;
б) $(3x + 10)^2 = 3(x + 10)$;
в) $(3x - 8)^2 = 3x^2 - 8x$;
г) $(4x + 5)^2 = 5x^2 + 4x$;
д) $(5x + 3)^2 = 5x + 3$;
е) $(5x + 3)^2 = (3x + 5)^2$;
ж) $(4x + 5)^2 = 4(x + 5)^2$;
з) $(2x + 10)^2 = 4(x + 5)^2$?

643 Тигезләмәне чишегез һәм дөреслеген тикшерегез:

а) $x^2 - 2x - 5 = 0$;
б) $x^2 + 4x + 1 = 0$;
в) $3y^2 - 4y - 2 = 0$;
г) $5y^2 - 7y + 1 = 0$;
д) $2y^2 + 11y + 10 = 0$;
е) $4x^2 - 9x - 2 = 0$.

644 Тигезләмә тамырларының якынча кыйммәтләрен 0,01 гә кадәр төгәллек белән алынган унарлы вакланмалар рәвешендә табыгыз:

а) $x^2 - 2x - 2 = 0$;
б) $x^2 + 5x + 3 = 0$;
в) $3x^2 - 7x + 3 = 0$;
г) $5x^2 + 31x + 20 = 0$.

645 a ның кыйммәте нинди булганда, $ax^2 - 3x - 5 = 0$ тигезләмәсенең тамырларыннан берсе 1 гә тигез?

646 $ax^2 - (a + c)x + c = 0$ тигезләмәсенең тамырларыннан берсе 1 гә тигез икәнен исбатлагыз.

647 Әгәр $cx^2 + bx + a = 0$ тигезләмәсенең тамырлары булса (биредә $c \neq 0$ һәм $a \neq 0$), ул тамырлар $ax^2 - bx + c = 0$ тигезләмәсе тамырларына кире зурлыкта икәнен исбатлагыз.

648 а) a ның кыйммәтләре нинди булганда, $a^2 + 7a + 6$ өчбуыны һәм $a + 1$ икебуыны тигез кыйммәтләр ала һәм нindиләрне? б) x ның кыйммәтләре нинди булганда, $3x^2 - x + 1$ һәм $2x^2 + 5x - 4$ өчбуыннары тигез кыйммәтләр ала һәм нindиләрне?

649 Беренче өч санның квадратлары суммасы соңгы ике санның квадратлары суммасына тигез булган бер-бер артлы килүче биш бөтен санны табыгыз.

650 Беренче ике санның квадратлары суммасы өченче санның квадратына тигез икәне билгеле булса, бер-бер артлы килүче өч җөп санны табыгыз.

651 Спорт мәйданчыгы буе иңеннән 5 м га озынрак булган турыпочмаклык формасында. Аның мәйданы 1800 м^2. Мәйданчыкның үлчәмнәрен табыгыз.

652 Бер-бер артлы килгән ике натураль сан суммасының квадраты аларның квадратлары суммасыннан 112 гә зуррак. Бу саннарны табыгыз.

653 Турыпочмаклыкның периметры 28 см га тигез, ә турыпочмаклыкның чиктәш якларына төзелгән квадратларның мәйданнары суммасы 116 $см^2$ га тигез. Турыпочмаклыкның якларын табыгыз.

654 12×18 см үлчәмле фоторәсем, киңлеге бердәй булган рам килеп чыгарлык итеп, кәгазь битенә ябыштырылган. Әгәр фоторәсем рамы белән бергә 280 $см^2$ мәйдан алып торса, рамның киңлеген табыгыз.

655 Футбол буенча мәктәпләр беренчелегенә ярыш вакытында 36 матч уйнала, шул ук вакытта һәр команда башка команда белән бер тапкыр гына уйный. Ярышта ничә команда катнашкан?

656 Шахмат турнирында 45 партия уйнала. Әгәр һәр шахматчы икенчесе белән берәр партия уйнаса, турнирда катнашучыларның санын табарга.

657 Тартманың төбе — иңе буеннан ике тапкыр кечерәк булган турыпочмаклык формасында. Тартманың биеклеге 0,5 м. Әгәр тартма төбе мәйданының аның ян стеналары мәйданыннан 1,08 $м^2$ га кечерәк икәне билгеле булса, тартманың күләмен табыгыз.

658 Буе иңеннән 1,5 тапкыр зуррак булган турыпочмаклык формасында катыргы кәгазь бар. Аның почмакларыннан ягы 8 см лы квадратлар кисеп алып, күләме 6080 $м^3$ булган ачык тартма ясарга мөмкин. Катыргы кәгазьнең үлчәмнәрен — иңен һәм буен табарга.

659 Тигезләмәне чишегез һәм Виет теоремасына кире теорема ярдәмендә дөреслеген тикшерегез:

а) $x^2 - 5\sqrt{2}\,x + 12 = 0$;

б) $x^2 + 2\sqrt{3}\,x - 72 = 0$;

в) $y^2 - 6\,y^2 + 7 = 0$;

г) $p^2 - 10p + 7 = 0$.

660 b ны табыгыз һәм тигезләмәне чишегез:

а) $2x^2 + bx - 10 = 0$, тамыры 5 кә тигез булса;

б) $3x^2 + bx + 24 = 0$, тамыры 3 кә тигез булса;

в) $(b - 1)x^2 - (bx + 1)\,x = 72$ тамыры 3 кә тигез булса;

г) $(b - 5)x^2 - (b - 2)\,x + b = 0$ тамыры $\frac{1}{2}$ гә тигез булса.

661 b ның теләсә нинди кыйммәте өчен $7x^2 + bx - 23 = 0$ тигезләмәсенең бер уңай һәм бер тискәре тамыры булуын исбатлагыз.

662 a ның берниндн кыйммәте өчен дә $12x^2 + 70x + a^2 + 1 = 0$ тигезләмәсенең уңай тамырлары булмавын исбатлагыз.

663 $3x^2 + bx + 10 = 0$ тигезләмәсе тамырларының аермасы $4\frac{1}{3}$ гә тигез. b ны табыгыз.

664 $5x^2 - 12x + c = 0$ тигезләмәсенең тамырларыннан берсе икенчесеннән 3 тапкыр зуррак. c ны табыгыз.

665 $4x^2+bx-27=0$ тигезләмәсенең тамырлары чагыштырмасы -3 кә тигез. b ны табыгыз.

666 $5x^2+13x-6=0$ тигезләмәсен чишми генә, аның тамырларының квадратлары суммасын табыгыз.

667 $2x^2-5x+c=0$ тигезләмәсенең квадратлары аермасы 0,25 кә тигез. c ны табыгыз.

668 $4x^2+bx+c=0$ тигезләмәсенең тамырларыннан берсе 0,5 кә, ә икенчесе ирекле буынга тигез. b һәм c ны табыгыз.

669 $x^2+bx+c=0$ тигезләмәсендәге b һәм c коэффициентларының әлеге тигезләмә тамырлары икәне билгеле, биредә $c\neq 0$. b һәм c ны табыгыз.

670 $x^2+px+q=0$ тигезләмәсе тамырларының квадратлары суммасын p һәм q аша аңлатыгыз.

671 $3x^2+2x+k=0$ тигезләмәсенең тамырлары x_1 һәм x_2 икәне билгеле, өстәвенә $2x_1=-3x_2$. k ны табыгыз.

672 $x^2-8x+k=0$ тигезләмәсенең тамырлары x_1 һәм x_2 икәне билгеле, өстәвенә $3x_1+4x_2=29$. k ны табыгыз.

10 нчы параграфка

673 Тигезләмәне чишегез:

а) $\frac{x+1}{6}+\frac{20}{x-1}=4$;

б) $\frac{x+15}{4}-\frac{21}{x+2}=2$;

в) $\frac{12}{x-1}-\frac{8}{x+1}=1$;

г) $\frac{16}{x-3}+\frac{30}{1-x}=3$;

д) $\frac{3}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{28}{1-x^2}$;

е) $\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}=\frac{20}{x^2-4}$;

ж) $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+3}{x-2}=\frac{29}{(x+1)(x-2)}$;

з) $\frac{x+2}{x+3}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{4}{(x+3)(x-1)}$.

674 а) $y=\frac{2x-5}{x+3}$;

б) $y=\frac{(x-4)(3x-15)}{x-9}$;

в) $y=\frac{x^2-5x+6}{x-2}$;

г) $y=\frac{x^3-7x^2+12x}{x-3}$

формуласы белән бирелгән функция графигының x күчәре белән кисешү ноктасының координаталарын табыгыз.

675 x ның кыйммәте нинди булганда,

а) $y=\frac{5x-7}{x^2+1}$ функциясенең кыйммәте -6; 0; 0,8; 0,56 га тигез булыр;

б) $y=\frac{x^2-2x+6}{x+4}$ функциясенең кыйммәте 1,5; 3; 7 гә тигез булыр?

676 Функцияләрнең графиклары кисешү нокталарының координаталарын табыгыз:

а) $y = 2x + 3$ һәм $y = \frac{34}{x-5}$;

б) $y = \frac{x^2-5x}{x+3}$ һәм $y = 2x$.

677 Тигезләмәне чишегез:

а) $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{3(2x-1)}{7(2x+1)} + \frac{8}{1-4x^2} = 0$;

б) $\frac{y}{y^2-9} - \frac{1}{y^2+3y} + \frac{3}{6y+2y^2} = 0$;

в) $\frac{2y-1}{14y^2+7y} + \frac{8}{12y^2-3} = \frac{2y+1}{6y^2-3y}$;

г) $\frac{3}{x^2-9} - \frac{1}{9-6x+x^2} = \frac{3}{2x^2+6x}$;

д) $\frac{9x+12}{x^3-64} - \frac{1}{x^2+4x+16} = \frac{1}{x-4}$;

е) $\frac{3}{8y^3+1} - \frac{1}{2y+1} = \frac{y+3}{4y^2-2y+1}$;

ж) $\frac{32}{x^3-2x^2-x+2} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x+1}$;

з) $\frac{1}{3(x-4)} + \frac{1}{2(x^2+3)} + \frac{1}{x^3-4x^2+3x-12} = 0$.

678 Тигезләмәнең тамырларын табыгыз:

а) $\frac{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{10x}{3x^2-2}$;

б) $\frac{1-y\sqrt{5}}{1+y\sqrt{5}} + \frac{1+y\sqrt{5}}{1-y\sqrt{5}} = \frac{9y}{1-5y^2}$.

679 а) $\frac{6}{y+1}$ һәм $\frac{y}{y-2}$ вакланмаларының суммасы аларның тапкырчыгышына тигез булганда;

б) $\frac{2}{y-3}$ һәм $\frac{6}{y+3}$ вакланмаларының суммасы аларның өлешенә тигез булганда;

в) $\frac{y+12}{y-4}$ һәм $\frac{y}{y+4}$ вакланмаларының аермасы аларның тапкырчыгышына тигез булганда, y үзгәрешлесенең кыйммәтен табыгыз.

680 Ике самолет бер үк вакытта бер аэродромнан 1800 км ераклыкта булган икенче аэродромга очалар. Бер самолетның тизлеге икенчесенең тизлегенә караганда 100 км/сәг кә кимрәк булу сәбәпле, ул тиешле урынга 36 мин ка соңрак килә. Һәр самолетның тизлеген табыгыз.

681 *A* һәм *B* станцияләре арасындагы ярты юлда поезд 10 мин ка тоткарланган. *B* станциясенә расписание буенча килеп җитү өчен, машинист поездның тизлеген 12 км/сәг кә арттырган. Станцияләр арасы 120 км га тигез булса, поездның баштагы тизлеген табыгыз.

682 600 км лы юлның $\frac{1}{4}$ ен үткәннән соң, поездны 1 сәг 30 мин ка туктатып торалар. Ахыргы станциягә вакытында килеп җитү өчен, машинист поездның тизлеген 15 км/сәг кә арттыра. Поезд юлда күпме вакыт булган?

683 Туристлар 12,5; 18 һәм 14 км лы өч кичү узганнар, өстәвенә беренче кичүне үткәндәге тизлек икенче кичүне үткәндәге тизлектән 1 км/сәг кә кимрәк һәм өченчесен үткәндә шулкадәргә артыграк була. Өченче кичүне үтү өчен, аларның икенчесен үтүгә караганда, 30 мин ка артыграк вакыт киткән. Барлык кичүгә күпме вакыт үткән?

684 Автомобиль ниндидер тизлек белән *A* дан *B* га кадәр 240 км озынлыгындагы юлны үткән. Кире кайтканда ул ярты юлны шул ук тизлек белән үтә, ә аннан соң тизлеген 10 км/сәг кә арттыра. Нәтиҗәдә кайту өчен баргандагыга караганда $\frac{2}{5}$ сәг кә кимрәк вакыт китә. *A* дан *B* га автомобиль нинди тизлек белән барган?

685 *A* дан *B* га кадәр 400 км га тигез араны поезд ниндидер тизлек белән үтә; ул *B* дан *A* га кайтканда юлның $\frac{2}{5}$ өлешен шул ук тизлек белән кайта, ә аннан соң тизлеген 20 км/сәг кә киметә. Әгәр барлык юлга 11 сәг вакыт киткән булса, поездның соңгы участоктагы тизлеген табыгыз.

686 Барлык юлга 5 сәг 30 мин вакыт сарыф итеп, теплоход елга буйлап түбән таба 150 км юл үтә һәм шул ук юлны кире кайта. Әгәр теплоходның торгын судагы тизлеге 55 км/сәг булса, агым тизлеген табыгыз.

687 Турист моторлы көймәдә елга агымына каршы 25 км юл үтеп, сал белән кире кайта. Ул көймәдә, салдагыга караганда, 10 сәг кә кимрәк йөзгән. Әгәр көймәнең торгын судагы тизлеге 12 км/сәг булса, агым тизлеген табыгыз.

688 Моторлы көймә елга буйлап югарыга таба 35 км үтә дә 18 км араны аның кушылдыгы буенча менә; барлык юлга 8 сәг вакыт китә. Әгәр көймәнең торгын судагы тизлеге 10 км/сәг булса, елганың агым тизлеген табыгыз.

689 *A* пунктыннан агым уңаена сал агызалар. Аның артыннан 5 сәг 20 мин тан соң шул ук пункттан катер чыга һәм 20 км үткәннән соң салны куып җитә. Катер салга караганда 12 км/сәг кә тизрәк барса, сал бер сәгатьтә ничә километр үткән?

690 Балыкчы, көймәгә утырып, N пунктыннан елга буйлап агымга каршы бара. 6 км йөзеп үткәннән соң, ул ишкәкләрен көймәгә куя, һәм N пунктыннан чыгып 4 сәг 30 мин тан соң агым аны яңадан N пунктына кайтара. Көймәнең торгын судагы тизлеге 90 м/мин икәнен белеп, елга агымының тизлеген табыгыз.

691 Сал A пунктыннан елга агымы уңаена түбән таба йөзеп киткәч, 2 сәг 40 мин тан соң B пристаненнан аңа каршы катер чыга. B дан 27 км ераклыкта алар очрашалар. Әгәр катерның торгын судагы тизлеге 12 км/сәг һәм A дан B га кадәр ераклык 44 км га тигез булса, салның тизлеген табыгыз.

692 Теплоход аралары 225 км булган A пристаненнан B пристанена барырга чыга. 1,5 сәг барганнан соң, аны $\frac{1}{2}$ сәг туктатып торалар һәм ул, вакытында барып җитү өчен, тизлеген 10 км/сәг кә арттыра. Теплоходның баштагы тизлеген табыгыз.

693 Аралары 120 км булган A шәһәреннән B шәһәренә бер үк вакытта ике автомобиль чыга. Аларның беренчесе һәрвакыт даими тизлек белән бара. Икенче автомобиль беренче $\frac{3}{4}$ сәг тә шундый ук тизлек белән бара, аннан соң 15 мин туктап тора һәм моннан соң тизлеген 5 км/сәг кә арттырып, B шәһәренә беренчесе белән бергә килеп җитә. Беренче автомобильнең тизлеген табыгыз.

694 Автобус 400 км га тигез булган A һәм B пунктлары арасын ниндидер уртача тизлек белән үтә. Кире кайтканда ул 2 сәг шул ук тизлек белән бара, ә аннары, тизлеген 10 км/сәг кә арттырып, A пунктына 20 мин ка тизрәк кайтып җитә. Автобус күпме вакытта кайтып җиткән?

695 Мотоциклчы бер шәһәрдән икенчесенә 4 сәг бара. Кайтканда ул беренче 100 км араны шул ук тизлек белән кайта, ә аннан соң тизлеген 10 км/сәг кә киметә һәм шул сәбәпле 30 мин озаграк кайта. Шәһәрләр арасын табыгыз.

696 A һәм B шәһәреннән бер үк вакытта ике автомобиль чыга һәм 5 сәг тән соң алар очрашалар. A шәһәреннән чыккан автомобильнең тизлеге икенче автомобиль тизлегеннән 10 км/сәг кә кимрәк. Әгәр беренче автомобиль икенче автомобильгә караганда A шәһәреннән $4\frac{1}{2}$ сәг кә алданрак чыкса, алар B шәһәреннән 150 км ераклыкта очрашырлар иде. A һәм B шәһәрләре арасындагы ераклыкны табыгыз.

697 M пристаненнан N пристанена кадәр араны катер агым уңаена 6 сәг тә үтә. Бервакыт N пристанена җитәргә 40 км калгач, катер кире борыла һәм M пристанена кайта. Барлык юлга 9 сәг вакыт китә. Елганың агым тизлеге 2 км/сәг булса, катерның торгын судагы тизлеген табыгыз.

698 M пунктыннан N пунктына кадәр араны мотоциклчы 5 сәг тә үткән. Кайтканда ул баштагы 36 км араны шул ук тизлек белән, ә юлның калган өлешен 3 км/сәг кә артыграк тизлек белән үткән. Әгәр кайтканда мотоциклчы юлда, M нан N га баргандагыга караганда, 15 мин азрак булса, ул башта нинди тизлек белән барган?

699 Әтисе һәм улы 240 м юл үтәләр. Бу вакытта әтисе улына караганда 100 адымга кимрәк атлый. Әгәр әтисенең адымы улының адымына караганда 20 см га озынрак булса, һәркайсының адым озынлыгын табыгыз.

700 Беренче бригада 160 костюм, ә икенчесе шушы ук срокта 25 % ка кимрәк тегәргә тиеш була. Беренче бригада, икенче бригадага караганда көнгә 10 костюм артыграк тегә һәм йөкләмәне билгеләнгән сроктан 2 көн элек үти. Икенче бригадага йөкләмәне үтәү өчен өстәмә 2 көн кирәк булса, ул бер көндә ничә костюм теккән?

701 Эшчеләр бригадасы билгеле бер срокта 768 тузан суыргыч эшләп чыгарырга тиеш була. Беренче биш көндә бригада билгеләнгән норманы көн саен үти, ә аннан соң билгеләнгәнгә караганда һәр көн 6 тузан суыргыч артыграк эшләп чыгара, һәм шуңа күрә билгеләнгән вакытка бер көн калгач, 844 тузан суыргыч әзер була. Бригада план буенча бер көндә ничә тузан суыргыч эшләргә тиеш була?

702 4 көндә 2 трактор бергә эшләп, кырның $\frac{2}{3}$ өлешен сукалыйлар. Әгәр беренче трактор белән бөтен кырны икенчесенә караганда 5 көнгә тизрәк сукалап булса, һәр трактор бөтен кырны ничә көндә сукалап чыгар иде?

703 Ике мамык җыю комбайны бергә эшләгәндә, беренче комбайн үзе генә эшләгәнгә караганда, кырдагы мамыкны 9 көнгә тизрәк җыяр иде. Һәр комбайн үзе генә барлык мамыкны ничә көндә җыеп алыр иде?

704 Бассейнны беренче торба аша тутыру өчен, беренче һәм икенче торба аша тутыруга караганда, 9 сәг кә артык вакыт һәм икенче торба аша тутыруга караганда 7 сәг кә кимрәк вакыт кирәк. Бассейнны бер үк вакытта ике торба аша тутыру өчен ничә сәгать вакыт кирәк?

705 Ике машинистка бергә эшләгәндә, кулъязманы күчереп басу өчен, беренче машинистка кулъязманың яртысын басуга караганда 1 сәг кә һәм икенче машинистка кулъязманың $\frac{1}{3}$ ен басуга караганда 1 сәг кә кимрәк вакыт сарыф итәләр. Һәр машинистка кулъязманы ничә сәгатьтә басып бетерер?

706 Ике слесарь заказ ала. Башта беренче слесарь 1 сәг эшли, аннан соң алар 4 сәг бергә эшлиләр. Нәтиҗәдә заказның 40 %ы үтәлә. Әгәр беренче слесарьга заказны үтәү өчен икенчесенә караганда 5 сәг кә артыграк вакыт кирәк булса, һәр слесарь бу заказны ничә сәгатьтә башкара алыр?

707 Ике эшче, бергә эшләп, бер йөкләмәне 12 көндә тәгәлли ала. Башта аларның берсе генә барлык эшнең яртысын эшләгәннән соң, аны икенчесе алыштырса, йөкләмә 25 көндә тәгәлләнер иде. Һәр эшче аерым гына барлык йөкләмәне ничә көндә башкара ала?

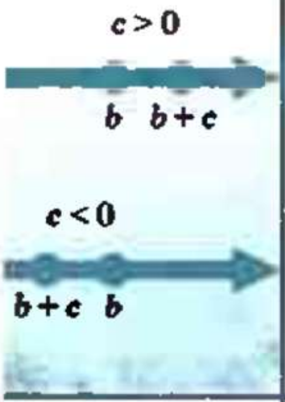
708 Тигезләмәне график ысул белән чишегез:

а) $x^3 + 6 = 0$; г) $\sqrt{x} = 3x$; ж) $\sqrt{x} = x^3$;

б) $x^3 + x - 2 = 0$; д) $\sqrt{x} = x - 2$; з) $\sqrt{x} = \frac{6}{x}$;

в) $x^3 - x + 4 = 0$; е) $\sqrt{x} = x^2$; и) $\sqrt{x} = \frac{12}{x}$.

709 $\sqrt{x} = ax + b$ тигезләмәсенең (биредә a һәм b — нинди дә булса саннар), ничә чишелеше булырга мөмкин икәнен графиклар ярдәмендә ачыклагыз.



IV бүлек

Тигезсезлекләр

§ 11. Санлы тигезсезлекләр һәм аларның үзлекләре

27. Санлы тигезсезлекләр

Без теләсә нинди a һәм b саннарын чагыштыра һәм чагыштыру нәтиҗәләрен, =, <, > тамгаларыннан файдаланып, тигезлек яки тигезсезлек рәвешендә яза алабыз. Теләсә нинди ирекле a һәм b саннары өчен $a = b$, $a < b$, $a > b$ бәйләнешләренең берсе, бары тик берсе генә үтәлә.

Мисаллар тикшерик.

1. $\frac{5}{8}$ һәм $\frac{4}{7}$ гади вакланмаларын чагыштырыйк. Моның өчен бу вакланмаларны уртак ваклаучыга китерәбез:

$$\frac{5}{8} = \frac{35}{56}; \quad \frac{4}{7} = \frac{32}{56}.$$

35 > 32 булганлыктан, $\frac{5}{8} > \frac{4}{7}$ була.

2. Хәзер 3,6748 һәм 3,675 унарлы вакланмаларын чагыштырыйк. Берәмлекләр, дистәләр, йөзләр разрядындагы цифрлар бер-берсенә туры килә, ә меңнәр разрядында беренче вакланмада 4 цифры, икенче вакланмада 5 цифры язылган. 4 < 5 булганлыктан, 3,6748 < 3,675.

3. $\frac{9}{20}$ гади вакланмасын 0,45 унарлы вакланмасы белән чагыштырыйк. $\frac{9}{20}$ вакланмасын унарлы вакланмага әйләндереп табабыз: $\frac{9}{20} = 0{,}45$.

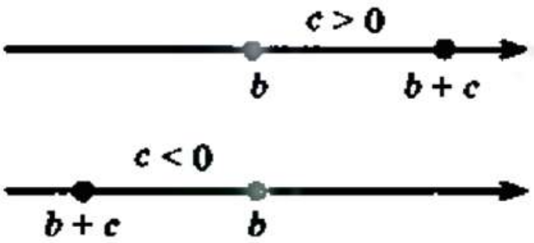
4. −15 һәм −23 тискәре саннарын чагыштырыйк. Беренче санның модуле икенче санның модуленнән кечерәк. Димәк, беренче сан икенчесеннән зуррак, ягъни $-15 > -23$.

Без санның конкрет төренә карап, аларны чагыштыру өчен теге яки бу ысулдан файдаландык. Ләкин саннарны чагыштыру өчен барлык очракны эченә алган ысулдан файдалану җайлырак. Әлеге ысул, саннарның аермасын исәпләп, бу саннарның уңай, тискәре яки нульгә тигез булуларын ачыклаудан тора. Саннарны чагыштыруның бу ысулы түбәндәге билгеләмәгә нигезләнгән.

Билгеләмә. Әгәр дә $a - b$ аермасы уңай сан булса, a саны b саныннан зуррак була; әгәр дә $a - b$ аермасы тискәре сан булса, a саны b саныннан кечерәк була.

Әгәр дә $a - b$ аермасы нульгә тигез булса, a саны b санына тигез булуын искәртик.

Координаталар турысында зуррак сан уңдарак яткан нокта белән, ә кечерәк сан сулдарак яткан нокта белән билгеләнә. Дөрестән дә, a һәм b ниндидер саннар булсын. $a - b$ аермасын c хәрефе белән тамгалыйк, $a - b = c$ булганлыктан, $a = b + c$ була. Әгәр c уңай сан булса, ул вакытта $b + c$ координаталы нокта b координаталы ноктадан уңдарак, ә инде c тискәре сан булса, сулдарак ята (рәс. 21). Димәк, әгәр $a > b$ булса, a координаталы нокта b координаталы ноктадан уңдарак, әгәр дә $a < b$ булса, сулдарак ята.



Рәс. 21

Әлеге билгеләмәнең мәсьәләләр чишкәндә ничек кулланылуын күрсәтик.

1 нче мисал a ның теләсә нинди кыйммәтләре өчен

$$(a-3)(a-5) < (a-4)^2$$

тигезсезлегенең дөрес икәнен исбатлыйк.

▶ Тигезсезлекнең сул һәм уң кисәкләренең аермасын төзеп, аның рәвешен үзгәртәбез:

$$(a-3)(a-5) - (a-4)^2 =$$
$$= a^2 - 3a - 5a + 15 - a^2 + 8a - 16 = -1.$$

a ның теләсә нинди кыйммәте өчен бу аерма тискәре. Димәк, теләсә нинди a өчен $(a-3)(a-5) < (a-4)^2$ тигезсезлеге дөрес. ◁

2 нче мисал Теләсә нинди ике санның квадратлары суммасы аларның икеләтелгән тапкырчыгышыннан кечерәк түгел икәнен исбатлыйк.

▶ a һәм b ирекле саннар булсын, $a^2 + b^2 \geq 2ab$ икәнен исбатларга кирәк.

Тигезсезлекнең сул һәм уң кисәкләре аермасының рәвешен үзгәртәбез:

$$(a^2 + b^2) - 2ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2.$$

$(a^2 + b^2) - 2ab$ аермасын без ниндидер аңлатманың квадраты рәвешенә китердек. Теләсә нинди a һәм b өчен $(a - b)^2 \geq 0$ булганлыктан, теләсә нинди a һәм b өчен $a^2 + b^2 \geq 2ab$ тигезсезлеге дә дөрес була. ◁

Күнегүләр

710 $p - q$ аермасы -5; 8; 0 гә тигез булса, p һәм q саннарын чагыштырыгыз.

711 а) $a - b = -0{,}001$; б) $a - b = 0$; в) $a - b = 4{,}3$ булса, a һәм b саннарын чагыштырыгыз.

712 $a < b$ икәне билгеле. $a - b$ аермасы 3,72; -5; 0 саны белән күрсәтелә аламы?

713 $3a(a + 6)$ һәм $(3a + 6)(a + 4)$ аңлатмалары бирелгән. $a = -5$; $a = 0$; $a = 40$ булганда, әлеге аңлатмаларның кыйммәтләрен чагыштырыгыз. Теләсә нинди a өчен беренче аңлатманың кыйммәте икенчесенең кыйммәтеннән кечерәк икәнен исбатлагыз.

714 $4b(b + 1)$ һәм $(2b + 7)(2b - 8)$ аңлатмалары бирелгән. Аларның кыйммәтләрен $b = -3$; $b = -2$; $b = 10$ булганда чагыштырыгыз. b ның теләсә нинди кыйммәте өчен беренче аңлатманың кыйммәте икенчесенең кыйммәтеннән зуррак була дип расларга мөмкинме?

715 Үзгәрешленең кыйммәте теләсә нинди булганда да тигезсезлекнең дөрес икәнен исбатлагыз:

а) $3(a + 1) + a < 4(2 + a)$; в) $(a - 2)^2 > a(a - 4)$;

б) $(7p - 1)(7p + 1) < 49p^2$; г) $(2a + 3)(2a + 1) > 4a(a + 2)$.

716 Тигезсезлекне исбатлагыз:

а) $2b^2 - 6b + 1 > 2b(b - 3)$; в) $p(p + 7) > 7p - 1$;

б) $(c + 2)(c + 6) < (c + 3)(c + 5)$; г) $8y(3y - 10) < (5y - 8)^2$.

717 Теләсә нинди x өчен тигезсезлек дөресме:

а) $4x(x + 0{,}25) > (2x + 3)(2x - 3)$;

б) $(5x - 1)(5x + 1) < 25x^2 + 2$;

в) $(3x + 8)^2 > 3x(x + 16)$;

г) $(7 + 2x)(7 - 2x) < 49 - x(4x + 1)$?

718 Тигезсезлекне исбатлагыз:

а) $a(a + b) \geq ab$; в) $2bc \leq b^2 + c^2$;

б) $m^2 - mn + n^2 \geq mn$; г) $a(a - b) \geq b(a - b)$.

719 Тигезсезлекнең теләсә нинди a өчен дөрес икәнен исбатлагыз:

а) $10a^2 - 5a + 1 \geq a^2 + a$; б) $a^2 - a \leq 50a^2 - 15a + 1$.

720 Уңай c саны белән аңа кире санның суммасы 2 дән кечерәк булмаганын исбатлагыз.

721 Тигезсезлекне исбатлагыз:

а) $\frac{c^2+1}{2} \geq c$; б) $\frac{c}{c^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

722 Икебуын квадратын аерып чыгаруны файдаланып, тигезсезлекне исбатлагыз:

а) $a^2 - 6a + 14 > 0$; б) $b^2 + 70 > 16b$.

723 $a \geq 0$ һәм $b \geq 0$ булса, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ икәнен исбатлагыз.

724 a һәм b тигез булмаган уңай саннар булса, аңлатмаларның кайсысы зуррак була: $a^3 + b^3$ мы әллә $ab(a + b)$ мы?

725 0, 1, 2, 3 саннарының һәркайсына бер үк k санын кушканнар. Барлыкка килгән саннар эзлеклелегенең кырый буыннарының тапкырчыгышын урта буыннар тапкырчыгышы белән чагыштырыгыз.

Кабатлау өчен күнегүләр

726 $x = -\frac{1}{3}$ булганда, $\frac{x^2-6x+3}{x+2}$ вакланмасының кыйммәтен табыгыз.

727 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{x^2-10x+25}{35-7x}$; б) $\frac{4x^2-12x+9}{(3-2x)^2}$.

728 Тигезләмәне чишегез:

а) $\frac{5}{x} = 2 - \frac{3}{x-2}$; б) $\frac{3}{2x-1} = 5x - 9$.

28. Санлы тигезсезлекләрнең үзлекләре

Санлы тигезсезлекләрнең үзлекләрен аңлатучы теоремаларны тикшерик:

1 нче теорема

Әгәр $a > b$ булса, $b < a$ була; әгәр $a < b$ булса, $b > a$ була.

● Дөрестән дә, әгәр $a - b$ аермасы уңай сан булса, $b - a$ аермасы тискәре сан була һәм киресенчә. ○

2 нче теорема

Әгәр $a < b$ һәм $b < c$ булса, $a < c$ була.

● $a - c$ аермасының тискәре сан икәнен исбатлыйк. Бу аермага b һәм $-b$ ны кушып табабыз:

$$a - c = a - c + b - b = (a - b) + (b - c).$$

Шарт буенча $a < b$ һәм $b < c$. Шуңа күрә $a - b$ һәм $b - c$ кушылучылары — тискәре саннар. Ул вакытта аларның суммасы да тискәре сан була. Димәк, $a < c$.

Шуңа охшаш рәвештә, әгәр $a > b$ һәм $b > c$ булса, $a > c$ була. ○

Бу үзлекләрнең геометрик иллюстрациясе 22 нче рәсемдә бирелгән.

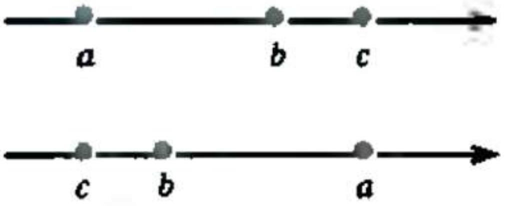


Рис. 22

[illegible] нче теорема

Әгәр $a < b$ һәм c теләсә нинди сан булса, $a + c < b + c$ була.

● $(a + c) - (b + c)$ аермасының рәвешен үзгәртик:

$$(a + c) - (b + c) = a - b.$$

Шарт буенча $a < b$ булганда, $a - b$ — тискәре сан. Шуңа күрә $(a + c) - (b + c)$ аермасы тискәре була. Димәк, $a + c < b + c$. ○

Шулай итеп,

дөрес тигезсезлекнең ике кисәгенә дә бер үк санны кушсаң, дөрес тигезсезлек килеп чыга.

[illegible] нче теорема

Әгәр $a < b$ һәм c уңай сан булса, $ac < bc$ була. Әгәр $a < b$ һәм c тискәре сан булса, $ac > bc$ була.

● $ac - bc$ аермасын тапкырчыгыш рәвешендә күрсәтәбез:

$$ac - bc = c(a - b).$$

$a < b$, шуңа күрә $a - b$ тискәре сан була. Әгәр $c > 0$ икән, $c(a - b)$ тапкырчыгышы тискәре була һәм, димәк, $ac < bc$. Әгәр $c < 0$ булса, $c(a - b)$ тапкырчыгышы уңай сан һәм, шулай булгач, $ac > bc$ була.

Бүлү гамәлен бүлүчегә кире санга тапкырлау белән алыштырырга мөмкин булганлыктан, моңа охшаш үзлек бүлү өчен дә дөрес була. Шулай итеп,

әгәр, дөрес тигезсезлекнең ике кисәген да бер үк уңай санга тапкырласаң яки бүлсәң, дөрес тигезсезлек килеп чыга;

әгәр, дөрес тигезсезлекнең ике кисәген дә бер үк тискәре санга тапкырлап яки бүлеп, тигезсезлек тамгасын капма-каршыга үзгәртсәң, дөрес тигезсезлек килеп чыга.

АРХИМЕД (287—212 б. э. кадәр)

— борынгы грек математигы һәм механигы. Яңа математик методларны эшкәрткән, аерым алганда, теләсә нинди теләгән кадәр зур санны аңлатырга мөмкинлек биргән ысулны күрсәткән. Табигать һәм техника мәсьәләренә карата математиканы куллану үрнәкләрен биргән.

Нәтиҗә

Әгәр a һәм b уңай саннар, ә $a < b$ булса, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ була.

● $a < b$ тигезсезлегенең ике кисәген дә уңай ab санына бүләбез: $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$. Ваклачманы кыскартып, $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ны, ягъни $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ны табабыз. ○

Тигезсезлекләрнең үзлекләрен файдалануга мисаллар китерик.

Мисал Ягы $54{,}2 < a < 54{,}3$ (миллиметрларда) булган тигезьяклы өчпочмакның периметрын табыйк.

▶ Ягы a булган тигезьяклы өчпочмакның периметры $P = 3a$ формуласы буенча исәпләнә. $54{,}2 < a$ һәм $a < 54{,}3$ тигезсезлекләренең ике кисәген дә 3 кә тапкырлыйбыз һәм нәтиҗәне икеле тигезсезлек рәвешендә язабыз:

$$54{,}2 \cdot 3 < 3a < 54{,}3 \cdot 3, \qquad 162{,}6 < 3a < 162{,}9.$$

Димәк, бирелгән өчпочмакның периметры 162,6 мм дан зуррак, ә 162,9 мм дан кечерәк була. ◁

Күнегүләр

729 Координаталар турысы сызыгыз һәм $a < b$, $c > b$, $c < d$, $a > e$ булса, координаталары a, b, c, d һәм e булган нокталарның әлеге турыда якынча ничек урнашуларын күрсәтегез.

730 m, n, p һәм q — ниндидер саннар, шуның белән бергә, $m > p$, $n > m$, $n < q$ булсын. p һәм n, p һәм q, q һәм m саннарын чагыштырыгыз. Саннарны чагыштырганда координаталар турысыннан файдаланыгыз.

731 $a < b$ икәне билгеле. Мөмкин булса, a һәм $b + 1$; $a - 3$ һәм b; $a - 5$ һәм $b + 2$; $a + 4$ һәм $b - 1$ саннарын чагыштырыгыз.

732 а) $a - 3 > b - 3$ һәм $b > 4$;   в) $7a > 7b$ һәм $b > \frac{1}{2}$;

б) $a - 8 > b - 8$ һәм $a < -12$;   г) $-2a > -2b$ һәм $b < -\frac{1}{3}$

тигезсезлекләренең дөрес икәне билгеле. a һәм b нинди саннар (уңай, тискәре) булыр?

733 Тигезсезлекләрнең үзлекләреннән файдаланып,

а) $18 > -7$ тигезсезлегенең ике кисәгенә дә -5 санын; 2,7 санын; 7 санын кушудан;

б) $5 > -3$ тигезсезлегенең ике кисәгеннән дә 2 санын; 12 санын; -5 санын алудан;

в) $-9 < 21$ тигезсезлегенең ике кисәген дә 2 гә; -1 гә; $-\frac{1}{3}$ гә тапкырлаудан;

г) $15 > -6$ тигезсезлегенең ике кисәген дә 3 кә; -3 кә; -1 гә бүлүдән килеп чыккан дөрес тигезсезлекне языгыз.

734 $a < b$ икәне билгеле. Тигезсезлекләр үзлегеннән файдаланып,

а) бу тигезсезлекнең ике кисәгенә дә 4 санын кушкач;
б) бу тигезсезлекнең ике кисәгеннән дә 5 санын алгач;
в) бу тигезсезлекнең ике кисәген дә 8 гә тапкырлагач;
г) бу тигезсезлекнең ике кисәген дә $\frac{1}{3}$ гә бүлгәч;
д) бу тигезсезлекнең ике кисәген дә $-4{,}8$ гә тапкырлагач;
е) бу тигезсезлекнең ике кисәген дә -1 гә бүлгәч, килеп чыккан дөрес тигезсезлекне языгыз.

735 $a < b$ икәне билгеле. Дөрес тигезсезлек килеп чыгарлык итеп, $*$ урынына $<$ яки $>$ тамгасы куегыз:

а) $-12{,}7a * -12{,}7b$;
в) $0{,}07a * 0{,}07b$;
б) $\frac{a}{3} * \frac{b}{3}$;
г) $-\frac{a}{2} * -\frac{b}{2}$.

736 а) $5a < 2a$; б) $7a > 3a$; в) $-3a < 3a$; г) $-12a > -2a$ икәне билгеле, a санының тамгасы нинди?

737 $c > d$ икәне билгеле. Түбәндәге тигезсезлекләрнең дөрес икәнен нинди теоремаларга нигезләнеп расларга мөмкин, аңлатып бирегез:

а) $-7c < -7d$;
г) $0{,}01c - 0{,}7 > 0{,}01d - 0{,}7$;
б) $\frac{c}{8} > \frac{d}{8}$;
д) $1 - c < -d$;
в) $2c + 11 > 2d + 11$;
е) $2 - \frac{c}{2} < 2 - \frac{d}{2}$.

738 a, b, c, d ның уңай саннар икәне билгеле, өстәвенә $a > b$, $d < b$, $c > a$. $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ саннарын үсә бару тәртибендә урнаштырыгыз.

739 $3 < a < 4$ икәне билгеле.

а) $5a$; б) $-a$; в) $a + 2$; г) $5 - a$; д) $0{,}2a + 3$ аңлатмаларының кыйммәтләренә бәя бирегез.

740 $5 < x < 8$ икәнен белеп,

а) $6x$; б) $-10x$; в) $x - 5$; г) $3x + 2$ аңлатмалары кыйммәтләренең чиген белегез.

741 $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ икәненнән файдаланып, а) $\sqrt{2} + 1$; б) $\sqrt{2} - 1$; в) $2 - \sqrt{2}$ аңлатмасының кыйммәтен бәяләгез.

742 $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ икәненнән файдаланып, а) $\sqrt{5} + 2$; б) $3 - \sqrt{5}$ аңлатмасының кыйммәтен бәяләгез.

743 а) $5{,}1 \le a \le 5{,}2$ булса, ягы a см булган квадратның периметрына бәя бирегез.

б) Квадратның периметры P см га тигез икәне билгеле. $15{,}6 \le P \le 15{,}8$ булганда, квадрат ягының озынлыгын бәяләгез.

744 а) $5 < y < 8$; б) $0{,}125 < y < 0{,}25$ булса, $\frac{1}{y}$ аңлатмасы кыйммәтенә бәя бирегез.

Кабатлау өчен күнегүләр

745 $x = \frac{1}{4}$; -3; $2-\sqrt{3}$ булганда, x^2-4x+1 күпбуынның кыйммәтен табыгыз.

746 Тигезләмәне чишегез:

а) $\frac{8x^2-3}{5}-\frac{5-9x^2}{4}=2$;

в) $\frac{10}{x^2-4}-\frac{3}{2x-4}=\frac{1}{2}$;

б) $\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x-1}{x^2+1}$;

г) $x-\frac{x^2-17}{x-3}=\frac{5}{x}$.

29. Санлы тигезсезлекләрне кушу һәм тапкырлау

Санлы тигезсезлекләрне буынлап кушу һәм тапкырлау турындагы теоремаларны тикшерик.

5 нче теорема

Әгәр $a<b$ һәм $c<d$ булса, $a+c<b+d$ була.

● $a<b$ тигезсезлегенең ике кисәгенә дә c санын кушсак, $a+c<b+c$ ны табабыз. $c<d$ тигезсезлегенең ике кисәгенә дә b санын кушып, $b+c<b+d$ ны табабыз. $a+c<b+c$ һәм $b+c<b+d$ тигезсезлекләреннән $a+c<b+d$ икәне күренә.

Тигезсезлекләр саны икедән артык булганда да буынлап кушу очрагы өчен теорема дөрес.

Шулай итеп,

әгәр бердәй тамгалы дөрес тигезсезлекләрне буынлап кушсак, дөрес тигезсезлек табыла.

6 нчы теорема

Әгәр $a<b$ һәм $c<d$ булса, биредә a, b, c һәм d — уңай саннар, ул вакытта $ac<bd$ була.

● $a<b$ тигезсезлегенең ике кисәген дә уңай c санына тапкырлап, $ac<bc$ ны табабыз. $c<d$ тигезсезлегенең ике кисәген дә уңай b санына тапкырлап, $bc<bd$ ны табабыз. $ac<bc$ һәм $bc<bd$ тигезсезлекләреннән $ac<bd$ икәнлеге килеп чыга. ○

Күрсәтелгән рәвештәге тигезсезлекләр икедән артык булганда да буынлап тапкырлау өчен теорема дөрес.

Шулай итеп,

әгәр сул һәм уң кисәкләре уңай саннар булган бердәй тамгалы дөрес тигезсезлекләрне буынлап тапкырласак, дөрес тигезсезлек табыла.

Әгәр $a < b$ һәм $c < d$ тигезсезлекләрендә a, b, c һәм d саннары арасында тискәреләре булса, $ac < bd$ тигезсезлеге дөрес булмаска да мөмкин икәнен әйтеп китик. Мәсәлән, $-3 < -2$ һәм $-5 < 6$ дөрес тигезсезлекләрен буынлап тапкырлаганнан соң, дөрес булмаган $15 < -12$ тигезсезлеген табабыз.

Нәтиҗә

Әгәр a һәм b саннары уңай һәм $a < b$ булса, $a^n < b^n$ була (n — натураль сан).

Дөрес, $a < b$ тигезсезлекләрен n тапкыр буынлап тапкырласак, биредә a һәм b — уңай саннар, $a^n < b^n$ дөрес тигезсезлеген табабыз. ○

Югарыда исбатланган үзлекләр сумманы, аерманы, тапкырчыгышны һәм өлешне бәяләүдә файдаланыла.

$15 < x < 16$ һәм $2 < y < 3$ икәне билгеле булсын, $x + y$ суммасын, $x - y$ аермасын, xy тапкырчыгышын һәм $\frac{x}{y}$ өлешен бәяләргә кирәк.

1. $x + y$ суммасын бәялик.

Тигезсезлекләрне буынлап кушу турындагы теореманы башта $15 < x$ һәм $2 < y$ тигезсезлекләренә карата, аннан соң $x < 16$ һәм $y < 3$ тигезсезлекләренә карата кулланса**к**, $17 < x + y$ һәм $x + y < 19$ ны табабыз. Нәтиҗәне икеле тигезсезлек рәвешендә язарга мөмкин: $17 < x + y < 19$. Гадәттә язу кыскача башкарыла:

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ 2 < y < 3 \\ \hline 17 < x + y < 19 \end{array}$$

2. $x - y$ аермасын бәялик.

Моның өчен $x - y$ аермасын $x + (-y)$ суммасы рәвешенә китерик. Башта $-y$ аңлатмасының кыйммәтен бәялибез. $2 < y < 3$ булганлыктан, $-2 > -y > -3$, ягъни $-3 < -y < -2$. Хәзер тигезсезлекләрне буынлап кушу теоремасын кулланабыз:

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ -3 < -y < -2 \\ \hline 12 < x - y < 14 \end{array}$$

3. xy тапкырчыгышын бәялик.

x һәм y саннарының һәркайсы уңай саннар арасында урнашканлыктан, бу саннар — уңай саннар. Тигезсезлекләрне буынлап тапкырлау турындагы теореманы кулланып табабыз:

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ 2 < y < 3 \\ \hline 30 < xy < 48 \end{array}$$

4. $\frac{x}{y}$ өлешен бәялик.

Моның өчен $\frac{x}{y}$ өлешен $x \cdot \frac{1}{y}$ тапкырчыгышы рәвешенә китерик. Башта $\frac{1}{y}$ аңлатмасын бәялибез. $2 < y < 3$ булганлыктан, $\frac{1}{2} > \frac{1}{y} > \frac{1}{3}$, ягъни $\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2}$ була. Тигезсезлекләрне буынлап тапкырлау турындагы теорема буенча

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ \frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2} \\ \hline 5 < \frac{x}{y} < 8 \end{array}$$

Күнегүләр

747 Тигезсезлекләрне буынлап кушыгыз:
а) $12 > -5$ һәм $9 > 7$; б) $-2{,}5 < -0{,}7$ һәм $-6{,}5 < -1{,}3$.

748 Тигезсезлекләрне буынлап тапкырлагыз:
а) $5 > 2$ һәм $4 > 3$; б) $8 < 10$ һәм $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

749 Уңай a һәм b саннары өчен:
а) $a > b$ булса, $a^2 > b^2$ була;
б) $a^2 > b^2$ булса, $a > b$ була дип әйтү дөресме?

750 $3 < a < 4$ һәм $4 < b < 5$ булсын.
а) $a + b$; б) $a - b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$ ны бәяләгез.

751 $6 < x < 7$ һәм $10 < y < 12$ икәнен белеп бәяләгез:
а) $x + y$; б) $y - x$; в) xy; г) $\frac{y}{x}$.

752 $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ һәм $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$ булуыннан файдаланып:
а) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ не; б) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ не бәяләгез.

753 $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ һәм $2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$ булуыннан файдаланып:
а) $\sqrt{6} + \sqrt{5}$; б) $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ не бәяләгез.

754 Тигезьянлы өчпочмакның нигезе a һәм ян ягы b озынлыкларының миллиметрларда күрсәтелгән чикләре билгеле:

$$26 \le a \le 28 \text{ һәм } 41 \le b \le 43.$$

Бу өчпочмакның периметрын бәяләгез.

755 Турыпочмаклыкның буе a һәм иңе b ны сантиметрларда үлчәгәннән соң, $5{,}4 < a < 5{,}5$ һәм $3{,}6 < b < 3{,}7$ икәнен беләләр.
а) Турыпочмаклыкның периметрын; б) турыпочмаклыкның мәйданын бәяләгез.

756 Турыпочмаклык формасындагы бүлмәнең буе a һәм иңе b ның (метрларда) чикләре билгеле:

$$7{,}5 \le a \le 7{,}6 \text{ һәм } 5{,}4 \le b \le 5{,}5.$$

Мәйданы 40 $м^2$ дан да кимрәк булмаска тиешле китапханәне бу бүлмәгә урнаштырып булырмы?

757 α һәм β — өчпочмакның почмаклары булсын.

$$58° \le \alpha \le 59°,\ 102° \le \beta \le 103°$$

икәне билгеле. Өченче почмакның зурлыгын бәяләгез.

Кабатлау өчен күнегүләр

758 Квадрат формасындагы табаклы калайдан 5 дм киңлегендә бер полоса кисеп алдылар. Кисеп алганнан соң калган өлешнең мәйданы 6 $дм^2$. Калайның баштагы үлчәмнәре нинди булган?

759 Аңлатманы гадиләштерегез:

$$\left(\frac{8x}{16-9x^2}+\frac{x}{3x-4}\right):\left(1-\frac{4-3x}{4+3x}\right).$$

760 а) $a > 0$ булганда, $9a+\frac{1}{a} \ge 6$;

б) $b < 0$ булганда, $25b+\frac{1}{b} \le -10$

икәнен исбатлагыз.

Контроль сораулар

1 Санлы тигезсезлекләрнең төп үзлекләрен аңлатучы теоремаларны әйтеп бирегез һәм аларны исбатлагыз.
2 Тигезсезлекләрне буынлап кушу турында теореманы әйтеп бирегез һәм исбатлагыз.
3 Тигезсезлекләрне буынлап тапкырлау турында теореманы әйтеп бирегез һәм исбатлагыз.

§ 12. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекләр һәм аларның системалары

30. Санлы аралыклар

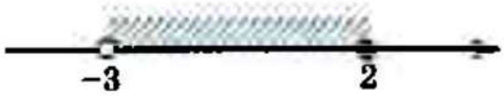
Координаталар турысында −3 һәм 2 координаталы нокталарны билгелик (рәс. 23). Әгәр нокта алар арасында урнашса, аңа −3 тән зуррак һәм 2 дән кечерәк сан тиңдәш була. Киресе дә дөрес: әгәр x саны $-3 < x < 2$ шартын канәгатьләндерсә, бу сан −3 һәм 2 координаталы нокталар арасында ятучы нокта белән сурәтләнер. $-3 < x < 2$

Рәс. 23

Рәс. 24

Рәс. 25

Рәс. 26

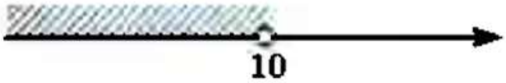


Рәс. 27

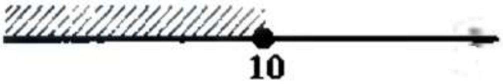
Рәс. 28

Рәс. 29

Рәс. 30



Рәс. 31



Рәс. 32

шартын канәгатьләндерүче барлык саннар күплеген *санлы аралыклар* яки гади генә −3 тән 2 гә кадәрге *аралык* дип атыйлар һәм (−3; 2) дип тамгалыйлар («−3 тән 2 гә кадәрге аралык» дип укыйлар). Бу аралыклар 24 нче рәсемдә сурәтләнгән.

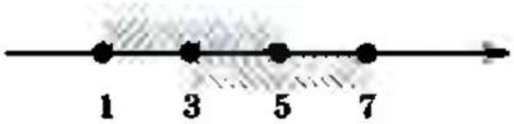
$-3 \le x \le 2$ шартын канәгатьләндерүче x саны координаталары −3 һәм 2 булган нокталар арасында яткан нокта белән сурәтләнә яки аларның берсе белән тәңгәл килә. Мондый саннар күплеген [−3; 2] рәвешендә язалар («−3 һәм 2 не дә кертеп, −3 тән 2 гә кадәрге аралык» дип укыла). Бу аралык 25 нче рәсемдә сурәтләнгән.

$-3 \le x < 2$ һәм $-3 < x \le 2$ икеле тигезсезлекләрен канәгатьләндерүче саннар күплеген тиңдәшле рәвештә [−3; 2) һәм (−3; 2] рәвешендә тамгалыйлар һәм («−3 не дә кертеп, −3 тән 2 гә кадәрге аралык; 2 не дә кертеп, −3 тән 2 гә кадәрге аралык») дип укыла. Бу аралыклар 26 нчы һәм 27 нче рәсемнәрдә сурәтләнгәннәр.

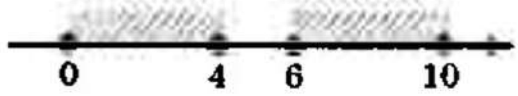
Координатасы 6 булган ноктаны координаталар турысында билгелик. Әгәр x саны 6 дан зуррак булса, ул бу ноктадан уңдарак яткан нокта белән сурәтләнер (рәс. 28). $x > 6$ шартын канәгатьләндерүче барлык x саннарының күплеге координатасы 6 булган ноктадан уңдарак урнашкан ярымтуры белән сурәтләнер (рәс. 29). Бу күплекне 6 дан плюс чиксезлеккә кадәрге аралык дип атыйлар һәм $(6; +\infty)$ рәвешендә тамгалыйлар.

$x \ge 6$ шартын канәгатьләндерүче саннар күплеге 6 координаталы ноктаны да эченә алган шул ук ярымтуры белән сурәтләнә (рәс. 30). Аны $[6; +\infty)$ дип тамгалыйлар («6 ны да кертеп, 6 дан плюс чиксезлеккә кадәрге аралык» дип укыла).

31 нче һәм 32 нче рәсемнәрдә $x < 10$ һәм $x \le 10$ тигезсезлекләрен канәгатьләндерүче саннар күплекләре



Рәс. 33



Рәс. 34

сурәтләнгән. Бу күплекләр $(-\infty; 10)$ һәм $(-\infty; 10]$ рәвешендә тамгаланган аралыклардан гыйбарәт. $(-\infty; 10)$ язмасы «Минус чиксезлектән 10 га кадәрге аралык» дип укыла; $(-\infty; 10]$ язмасы «10 ны да кертеп, минус чиксезлектән 10 га кадәрге аралык» дип укыла.

Барлык реаль саннарның күплеге координаталар турысы белән сурәтләнә. Аны болай тамгалыйлар: $(-\infty; +\infty)$.

33 нче рәсемдә [1; 5] һәм [3; 7] аралыклары сурәтләнгән. [3; 5] аралыгы аларның уртак өлешен тәшкил итә. Һиндидер A һәм B күплекләренең уртак өлешен тәшкил иткән күплекне әлеге күплекләрнең *кисешүе* дип атыйлар һәм $A \cap B$ дип тамгалыйлар. [3; 5] аралыгы [1; 5] һәм [3; 7] аралыкларының кисешүе була. Ул болай языла:

$$[1; 5] \cap [3; 7] = [3; 5].$$

[0; 4] һәм [6; 10] аралыкларының уртак элементлары юк (рәс. 34). Әгәр күплекләрнең уртак элементлары булмаса, аларның кисешүе буш дип әйтәләр. Димәк, [0; 4] һәм [6; 10] аралыкларының кисешүе буш була.

[1; 7] аралыгындагы һәрбер сан (33 нче рәсемне карагыз) [1; 5] һәм [3; 7] аралыкларының берсендә була, ягъни [1; 5] аралыгында, я [3; 7] аралыгында, я аларның икесенеке дә була.

A һәм B күплекләренең берсендә генә булган элементлардан торган күплек тә бу күплекләрнең *берләшмәсе* дип атала һәм $A \cup B$ дип тамгалана. [1; 7] аралыгы [1; 5] һәм [3; 7] аралыкларының берләшмәсе була. Моны түбәндәгечә язарга мөмкин:

$$[1; 5] \cup [3; 7] = [1; 7].$$

Аралыкларның берләшмәсе һәрвакыт аралыктан тормый, моны әйтеп китәргә кирәк. Мәсәлән, $[0; 4] \cup [6; 10]$ күплеге аралыкны тәшкил итми (34 нче рәсемне карагыз).

Күплекләрнең кисешүенә һәм берләшмәсенә башка мисаллар китерик. Тискәре булмаган бөтен саннар күплегенең һәм уңай булмаган бөтен саннар күплегенең кисешүе булып нуль саны хезмәт итә, ә барлык бөтен саннар күплеге әлеге күплекләрнең берләшмәсе була. Уңай һәм тискәре саннар күплегенең кисешүе буш күплек була, ә бу күплекләрнең берләшмәсе булып нульдән башка барлык реаль саннар күплеге хезмәт итә.

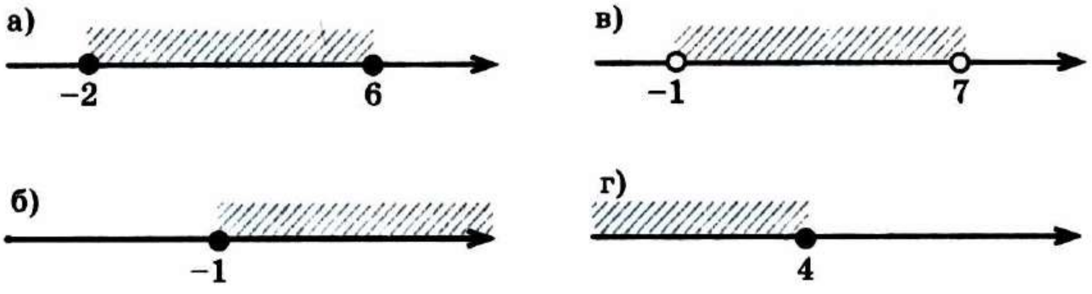
Күнегүләр

761 Аралыкны координаталар турысында сурәтләгез:

а) $[-2; 4]$; в) $[0; 5]$; д) $(3; +\infty)$; ж) $(-\infty; 4]$;

б) $(-3; 3)$; г) $(-4; 0)$; е) $[2; +\infty)$; з) $(-\infty; -1)$.

35 нче рәсемдә сурәтләнгән санлы аралыкларны языгыз.



Рәс. 35

762 Координаталар турысында аралыкны сурәтләгез:

а) $(3; 7)$; б) $[1; 6]$; в) $(-\infty; 5)$; г) $[12; +\infty)$.

763 Координаталар турысында

а) $x \geq -2$; б) $x \leq 3$; в) $x > 8$; г) $x < -5$

тигезсезлеген канәгатьләндерүче саннар күплеген сурәтләгез.

764 Координаталар турысында

а) $-1{,}5 \leq x \leq 4$; в) $-5 \leq x \leq -3\frac{1}{3}$;

б) $-2 < x < 1{,}3$; г) $2 < x \leq 6{,}1$

икеле тигезсезлекләрен канәгатьләндерүче саннар күплеген сурәтләгез.

765 а) -3; -5; 5; $6{,}5$; $-3{,}9$; $-4{,}1$ саны $(-4; 6{,}5)$ саннар аралыгына керәме?

б) -9; -8; $-5{,}5$; -5; -6; $-7{,}5$ саны $[-8; -5]$ саннар аралыгына керәме?

766 $-1{,}6$; $-1{,}5$; -1; 0; 3; $5{,}1$; $6{,}5$ саннарыннан кайсылары

а) $[-1{,}5; 6{,}5]$; б) $(3; +\infty)$; в) $(-\infty; -1]$

саннар аралыгына керә?

767 а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{6}$ саны $(1{,}5; 2{,}4)$ саннар аралыгына керәме?

768 а) $(-4; 5)$; б) $[-1; 1]$ аралыкка кергән ике уңай, ике тискәре санны күрсәтегез.

769 а) $(-4; 3)$; б) $[-3; 5]$ аралыкка керә торган барлык бөтен саннарны күрсәтегез.

770 Бөтен саннарның кайсылары

а) $[0; 8]$; б) $(-3; 3)$; в) $(-5; 2)$; г) $(-4; 9]$

саннар аралыгына керә?

771 а) $[-12; -9]$; б) $[-1; 17)$; в) $(-\infty; 31]$; г) $(-\infty; 8)$ саннар аралыгына керүче иң зур бөтен санны күрсәтегез.

772 1,98 саны $(-\infty; 2)$ аралыкка керәме? Әлеге аралыкка керә торган 1,98 дән зуррак ике сан күрсәтегез. Бу аралыкка керә торган иң зур санны табып буламы? Шушы ук аралыкка керүче иң кечкенә сан бармы?

773 Координаталар турысыннан файдаланып, аралыкларның кисешүен табыгыз:

а) $(1; 8)$ һәм $(5; 10)$; в) $(5; +\infty)$ һәм $(7; +\infty)$;
б) $[-4; 4]$ һәм $[-6; 6]$; г) $(-\infty; 10)$ һәм $(-\infty; 6)$.

774 Координаталар турысында аралыклар берләшмәсен штрихлап күрсәтегез:

а) $[7; 0]$ һәм $[-3; 5]$; в) $(-\infty; 4)$ һәм $(10; +\infty)$;
б) $(-4; 1)$ һәм $(10; 12)$; г) $[3; +\infty)$ һәм $(8; +\infty)$.

775 Координаталар турысыннан файдаланып, аралыкларның кисешүен һәм берләшмәсен табыгыз:

а) $(-3; +\infty)$ һәм $(4; +\infty)$; в) $(-\infty; 6)$ һәм $(-\infty; 9)$;
б) $(-\infty; 2)$ һәм $[0; +\infty)$; г) $[1,5]$ һәм $[0; 8]$.

Кабатлау өчен күнегүләр

776 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\dfrac{1+\dfrac{a-x}{x}}{ax}$; б) $\dfrac{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}-1}{2a^2b^2}$.

777 $a^2+5>2a$ тигезсезлеген исбатлагыз.

778 Пассажир поездда 120 км барганнан соң, сәгатенә 5 км га тизрәк бара торган поезд белән кире кайта. Әгәр ул кайтканда юлда 20 мин вакыт азрак уздырган булса, һәр поездның тизлеген табыгыз.

779 $y=\dfrac{3x-1}{x-2}$ формуласы белән бирелгән функциянең кыйммәте x ның нинди кыйммәтләре өчен -1 гә тигез була?

31. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекләрне чишү

$5x-11>3$ тигезсезлегә x үзгәрешлесенең кайберләре кыйммәтләре өчен дөрес санлы тигезсезлеккә әйләнә, ә башкалары өчен әйләнми. Әйтик, әгәр x урынына 4 санын куйсак, дөрес булган $5\cdot4-11>3$ тигезсезлеге табылыр, ә инде 2 санын куйсак, дөрес булмаган $5\cdot2-11>3$ тигезсезлеге табылыр. Мондый очракта 4 саны $5x-11>3$ *тигезсезлегенең чишелеше була* яки бу тигезсезлекне канәгатьләндерә, диләр. Мәсәлән, 100; 180; 1000 санарының тигезсезлекнең чишелешләре булуын тикшерү кыен түгел. 2; 0,5; -5 саннары бу тигезсезлекнең чишелешләре түгел.

Билгеләмә. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекне санлы дөрес тигезсезлеккә әверелдерүче үзгәрешленең кыйммәте тигезсезлекнең чишелеше дип атала.

Тигезсезлекне чишү — аның барлык чишелешләрен табу яки аларның булмавын исбат итү ул.

Чишелешләре бер үк булган тигезсезлекләр *тигезкөчле тигезсезлекләр* дип атала. Чишелешләре булмаган тигезсезлекләрне дә тигезкөчле тигезсезлекләргә кертәләр.

Тигезсезлекләрне чишкәндә түбәндәге үзлекләр файдаланыла:

1) Әгәр кушылучыны капма-каршы тамгасы белән тигезсезлекнең бер кисәгеннән икенче кисәгенә күчерсәк, бирелгән тигезсезлеккә тигезкөчле булган тигезсезлек килеп чыга.

2) Әгәр тигезсезлекнең ике кисәген да бер үк уңай санга тапкырласак яки бүлсәк, бирелгән тигезсезлеккә тигезкөчле тигезсезлек килеп чыга;

әгәр тигезсезлекнең ике кисәген дә бер үк тискәре санга тапкырлап яки бүлеп, тигезсезлекнең тамгасын капма-каршыга үзгәртсәк, бирелгән тигезсезлеккә тигезкөчле тигезсезлек килеп чыга.

Мәсәлән,

$$18 + 6x > 0 \quad (1)$$

тигезсезлеге

$$6x > -18 \quad (2)$$

тигезсезлегенә тигезкөчле, ә $6x > -18$ тигезсезлеге $x > -3$ тигезсезлегенә тигезкөчле.

Тигезсезлекләрнең күрсәтелгән үзлекләрен санлы тигезсезлекләрнең үзлекләренә таянып исбатларга була.

Мәсәлән, (1) һәм (2) тигезсезлекләрнең тигезкөчле икәнен исбатлыйк. Ниндидер a саны (1) тигезсезлегенең чишелеше булсын, ягъни аны дөрес $18 + 6a > 0$ санлы тигезсезлегенә әйләндерсен. Бу тигезсезлекнең ике кисәгенә дә -18 санын кушып, $18 + 6a - 18 > 0 - 18$ дөрес тигезсезлеген, ягъни $6a > -18$ не табабыз, бу исә a саны (2) тигезсезлегенең чишелеше икәнен аңлата.

Без (1) тигезсезлегенең һәр чишелеше (2) тигезсезлегенең чишелеше булуын күрсәттек. (2) тигезсезлегенең һәр чишелеше (1) тигезсезлегенең чишелеше булып хезмәт итүе аналогик

тәртиптә исбатлана. Шулай итеп, (1) һәм (2) тигезсезлекләренең чишелешләре бер үк, ягъни алар тигезкөчлеләр.

Гомуми рәвештә тигезсезлекләрнең ике үзлегенең дөреслеге дә югарыдагыча фикер йөртеп раслана.

Тигезсезлекләрне чишүгә мисаллар китерик.

1 нче мисал $16x > 13x + 45$ тигезсезлеген чишәбез.

▶ $13x$ кушылучысын капма-каршы тамгасы белән тигезсезлекнең сул кисәгенә чыгарабыз:

$$16x - 13x > 45.$$

Охшаш буыннарын берләштерәбез:

$$3x > 45.$$

Тигезсезлекнең ике кисәген дә 3 кә бүләбез:

$$x > 15.$$

Тигезсезлекнең чишелешләр күплеге 15 тән зур булган барлык саннардан гыйбарәт. Бу күплек 36 нчы рәсемдә сурәтләнгән $(15; +\infty)$ саннар аралыгын тәшкил итә.

Рәс. 36

Җавапны $(15; +\infty)$ саннар аралыгы рәвешендә яки бу аралыкны хасил иткән $x > 15$ тигезсезлеге рәвешендә язарга була. ◁

2 нче мисал $15x - 23(x + 1) > 2x + 11$ тигезсезлеген чишик.

▶ Тигезсезлекнең сул кисәгендәге җәяләрне ачабыз:

$$15x - 23x - 23 > 2x + 11.$$

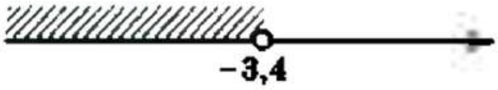
Тигезсезлекнең уң кисәгендәге $2x$ кушылучысын сул кисәккә, ә -23 кушылучысын сул кисәктән уң кисәккә капма-каршы тамгалары белән күчереп, охшаш буыннарны берләштерәбез:

$$15x - 23x - 2x > 11 + 23,$$

$$-10x > 34.$$

Тигезсезлекнең ике кисәген дә -10 га бүлеп, тигезсезлекнең тамгасын капма-каршыга үзгәртәбез:

$$x < -3,4.$$



Рәс. 37

Тигезсезлекләрнең чишелешләре күплеге 37 нче рәсемдә сурәтләнгән $(-\infty; -3,4)$ аралыктан гыйбарәт.

Җавап: $(-\infty; -3,4)$. ◁

3 нче мисал $\frac{x}{3}-\frac{x}{2}<2$ тигезсезлеген чишик.

Тигезсезлекнең ике кисәген дә тигезсезлеккә кергән вакланмаларның иң кечкенә уртак ваклаучысына, ягъни 6 га тапкырлап,

$$\frac{x}{3}\cdot 6-\frac{x}{2}\cdot 6<2\cdot 6,$$

$$2x-3x<12 \text{ не табабыз.}$$

Моннан

$$-x<12,$$

$$x>-12.$$

Җавап: $(-12; +\infty)$. ◁

Без үзебез тикшергән мисалларның һәркайсында бирелгән тигезсезлекләрне $ax>b$ яки $ax<b$ рәвешендәге тигезкөчле тигезсезлекләргә алмаштырдык, биредә a һәм b — нинди дә булса саннар. Мондый төр тигезсезлекләр *бер үзгәрешлеле сызыкча тигезсезлекләр* дип атала.

Югарыда китерелгән мисалларда без үзгәрешле алдындагы коэффициенты нульгә тигез булмаган сызыкча тигезсезлекләр таптык. Ләкин тигезсезлекләрне чишкәндә, $0\cdot x>b$ яки $0\cdot x<b$ рәвешендәге сызыкча тигезсезлекләр дә килеп чыгуы мөмкин. Мондый төр тигезсезлекнең, димәк, моңа тиңдәшле баштагы тигезсезлекнең дә чишелеше булмый яки теләсә нинди сан аның чишелеше була ала.

4 нче мисал $2(x+8)-5x<4-3x$ тигезсезлеген чишик.

Табабыз:

$$2x+16-5x<4-3x,$$

$$2x-5x+3x<4-16.$$

Тигезсезлекнең сул кисәгендә охшаш буыннарны берләштергәннән соң, нәтиҗәне $0\cdot x$ рәвешендә язабыз:

$$0\cdot x<-12.$$

Табылган тигезләмәнең чишелешләре юк, чөнки x ның теләсә инди кыйммәте өчен тигезсезлек дөрес булмаган санлы $0<-12$ тигезсезлегенә әйләнә. Димәк, аңа тигезкөчле булган бирелгән тигезсезлекнең дә чишелешләре булмый.

Җавап: чишелешләре юк. ◁

Күнегүләр

780 y ның: а) 8; б) −2; в) 1,5; г) 2 гә тигез кыйммәте $5y > 2(y - 1) + 6$ тигезсезлегенең чишелеше була аламы?

781 −2; −1; −1,5; −0,3 саннарының кайсылары $12x + 4 < 7x - 1$ тигезсезлегенең чишелешләре була ала?

782 $2x < x + 7$ тигезсезлегенең нинди дә булса чишелешен күрсәтегез.

783 Тигезсезлекне чишегез һәм аның чишелешләре күплеген координаталар турысында күрсәтегез:

а) $x + 8 > 0$; б) $x - 7 < 0$; в) $x + 1,5 \le 0$; г) $x - 0,4 \ge 0$.

784 Тигезсезлекне чишегез:

а) $3x > 15$; д) $12y < 1,8$; и) $0,5y > -4$;
б) $-4x < -16$; е) $27b \ge 12$; к) $2,5a > 0$;
в) $-x \ge 1$; ж) $-6x > 1,5$; л) $\frac{1}{3}x > 6$;
г) $11y \le 33$; з) $15x \le 0$; м) $-\frac{1}{7}y < -1$.

785 Тигезсезлекне чишегез һәм аның чишелешләре күплеген координаталар турысында күрсәтегез:

а) $2x < 17$; д) $30x > 40$; и) $\frac{1}{6}x < 2$;
б) $5x \ge -3$; е) $-15x < -27$; к) $\frac{1}{3}x < 0$;
в) $-12x < -48$; ж) $-4x \ge -1$; л) $0,02x \ge -0,6$;
г) $-x < -7,5$; з) $10x < -24$; м) $-1,8x \le 36$.

786 $5x + 1 > 11$ тигезсезлеген чишегез. x ның бу тигезсезлекнең чишелешләре булган өч кыйммәтен күрсәтегез.

787 $3x - 2 < 6$ тигезсезлеген чишегез. 4; $2\frac{4}{5}$; $2\frac{4}{7}$ саны әлеге тигезсезлекнең чишелеше була аламы?

788 Тигезсезлекне чишегез:

а) $7x - 2,4 < 0,4$; д) $17 - x > 10 - 6x$;
б) $1 - 5y > 3$; е) $30 + 5x \le 18 - 7x$;
в) $2x - 17 \ge -27$; ж) $64 - 6y \ge 1 - y$;
г) $2 - 3a \le 1$; з) $8 + 5y \le 21 + 6y$.

789 Тигезсезлекне чишегез һәм аның чишелешләре күплеген координаталар турысында сурәтләгез:

а) $11x - 2 < 9$; д) $3y - 1 > -1 + 6y$;
б) $2 - 3y > -4$; е) $0,2x - 2 < 7 - 0,8x$;
в) $17 - x \le 11$; ж) $6b - 1 < 12 + 7b$;
г) $2 - 12x > -1$; з) $16x - 34 > x + 1$.

790 а) x ка нинди кыйммәтләр биргәндә, $2x - 1$ икебуынының кыйммәтләре уңай була?

б) y ка нинди кыйммәтләр биргәндә, $21 - 3y$ икебуынының кыйммәтләре тискәре була?

в) c га нинди кыйммәтләр биргәндә, $5 - 3c$ икебуынының кыйммәтләре 80 нән зуррак була?

791 а) a га нинди кыйммәтләр биргәндә, $2a - 1$ икебуынының кыйммәтләре $7 - 1,2a$ икебуыны кыйммәтләреннән кечерәк була?
б) p га нинди кыйммәтләр биргәндә, $1,5p - 1$ икебуынының кыйммәтләре $1 + 1,1p$ икебуыны кыйммәтләреннән зуррак була?

792 Тигезсезлекне чишегез:
а) $5(x - 1) + 7 \le 1 - 3(x+2)$;
б) $4(a + 8) - 7(a - 1) < 12$;
в) $4(b - 1,5) - 1,2 \ge 6b - 1$;
г) $1,7 - 3(1 - m) \le -(m - 1,9)$;
д) $4x \ge 12(3x - 1) - 16(x + 1)$;
е) $a + 2 < 5(2a + 8) + 13(4 - a)$;
ж) $6y - (y + 8) - 3(2 - y) \le 2$.

793 Тигезсезлекне чишегез:
а) $4(2 - 3x) - (5 - x) > 11 - x$;
б) $2(3 - z) - 3(2 + x) \le z$;
в) $1 > 1,5(4 - 2a) + 0,5(2 - 6a)$;
г) $2,5(2 - y) - 1,5(y - 4) \le 3 - y$;
д) $x - 2 \ge 4,7(x - 2) - 2,7(x - 1)$;
е) $3,2(a - 6) - 1,2a \le 3(a - 8)$.

794 Тигезсезлекне чишегез дә аның чишелешләре күплеген координаталар турысында күрсәтегез:
а) $a(a - 4) - a^2 > 12 - 6a$;
б) $(2x - 1)2x - 5x < 4x^2 - x$;
в) $5y^2 - 5y(y + 4) \ge 100$;
г) $6a(a - 1) - 2a(3a - 2) < 6$.

795 Тигезсезлекне чишегез:
а) $0,2x^2 - 0,2(x - 6)(x + 6) > 3,6x$;
б) $(2x - 5)^2 - 0,5x < (2x - 1)(2x + 1) - 15$;
в) $(12x - 1)(3x + 1) < 1 + (6x + 2)^2$;
г) $(4y - 1)^2 > (2y + 3)(8y - 1)$.

796 Тигезсезлекне чишегез:
а) $4b(1 - 3b) - (b - 12b^2) < 43$;
б) $3y^2 - 2y - 3y(y - 6) \ge -2$;
в) $2p(5p + 2) - p(10p + 3) \le 14$;
г) $a(a - 1) - (a^2 + a) < 34$.

797 Тигезсезлекне чишегез:

а) $\frac{2x}{5} > 1$; г) $\frac{3x-1}{4} > 2$; ж) $\frac{12-7x}{42} \ge 0$;

б) $\frac{x}{3} < 2$; д) $2 > \frac{6-x}{5}$; з) $\frac{1}{3}(x + 15) > 4$;

в) $\frac{6x}{7} \ge 0$; е) $\frac{2+3x}{18} < 0$; и) $6 \le \frac{2}{7}(x + 4)$.

798 Тигезсезлекне чишегез:

а) $\frac{9x}{5} \geq 0$; в) $\frac{5+6x}{2} > 3$; д) $\frac{1}{7}x \geq 2$;

б) $1 < \frac{3x}{4}$; г) $\frac{4x-11}{4} \leq 0$; е) $\frac{2}{11}(x-4) < 3$.

799 y ның кыйммәтләре нинди булганда,

а) $\frac{7-2y}{6}$ вакланмасының кыйммәтләре $\frac{3y-7}{12}$ вакланмасының тиңдәш кыйммәтләреннән зуррак булыр?

б) $\frac{4,5-2y}{5}$ вакланмасының кыйммәтләре $\frac{2-3y}{10}$ вакланмасының тиңдәш кыйммәтләреннән кечерәк булыр?

в) $5y-1$ икебуынының кыйммәтләре $\frac{3y-1}{4}$ вакланмасының тиңдәш кыйммәтләреннән зуррак булыр?

г) $\frac{5-2y}{12}$ вакланмасының кыйммәтләре $1-6y$ икебуынының тиңдәш кыйммәтләреннән кечерәк булыр?

800 Тигезсезлекне чишегез:

а) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3} < 5$; в) $\frac{x}{4}-\frac{x}{2} > -3$; д) $\frac{2x}{5}-x \leq 1$;

б) $\frac{3y}{2}-\frac{y}{3} \geq 2$; г) $y+\frac{y}{2} > 3$; е) $\frac{3x}{4}-2x < 0$.

801 Тигезсезлекне чишегез һәм аның чишелешләре күплеген координаталар турысында күрсәтегез:

а) $\frac{13x-1}{2} < 4x$; в) $\frac{x}{4}-\frac{x}{5} \leq 2$;

б) $\frac{5-2a}{4} \geq 2a$; г) $\frac{2y}{5}-\frac{y}{2} \geq 1$.

802 Тигезсезлекне чишегез:

а) $\frac{3+x}{4}+\frac{2-x}{3} < 0$; г) $x-\frac{x-3}{5}+\frac{2x-1}{10} \leq 4$;

б) $\frac{4-y}{5}-5y \geq 0$; д) $\frac{y-1}{2}-1+\frac{2y-1}{6} > y$;

в) $y-\frac{2y-1}{4} \geq 1$; е) $p-\frac{p-1}{2}-\frac{p+3}{4} > 2$.

803 Тигезсезлекне чишегез:

а) $\frac{2a-1}{2}-\frac{3a-3}{5} > a$; в) $\frac{5x-1}{5}+\frac{x+1}{5} \leq x$;

б) $x-\frac{2x+3}{2} \leq \frac{x-1}{4}$; г) $\frac{y-1}{2}-\frac{2y+3}{8}-y > 2$.

804 а) a ның кыйммәтләре нинди булганда, $\frac{2a-1}{4}$ һәм $\frac{a-1}{3}$ вакланмаларының суммасы уңай була?

б) b ның кыйммәтләре нинди булганда, $\frac{3b-1}{2}$ һәм $\frac{1+5b}{4}$ вакланмаларының аермасы тискәре була?

805 Тигезсезлекне чишегез:

а) $31(2x+1)-12x>50x$;

б) $x+4-\frac{x}{3}<\frac{2x}{3}$;

в) $3x+7>5(x+2)-(2x+1)$;

г) $\frac{12x-1}{3}<4x-3$.

806 Функция $y=-1{,}5x+7{,}5$ формуласы белән бирелгән. x ның кыйммәтләре нинди булганда:

а) $y=0$; б) $y>0$; в) $y<0$ була?

807 $y=2x+13$ формуласы белән бирелгән функция x ка нинди кыйммәтләр биргәндә уңай кыйммәтләр; тискәре кыйммәтләр кабул итә?

808 Үзгәрешленең нинди кыйммәтләре өчен аңлатманың мәгънәсе бар:

а) $\sqrt{2x-4}$; в) $\sqrt{\frac{1+3a}{25}}$; д) $\sqrt{-3(1-5x)}$;

б) $\sqrt{4-6a}$; г) $\sqrt{\frac{7-5a}{8}}$; е) $\sqrt{-(6-x)}$?

809 а) $1{,}6-(3-2y)<5$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче иң зур бөтен санны табыгыз.

б) $8(6-y)<24{,}2-7y$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче иң кечкенә бөтен санны табыгыз.

810 n ның нинди натураль кыйммәтләре өчен

а) $(2-2n)-(5n-27)$ аермасы уңай;

б) $(-27{,}1+3n)+(7{,}1+5n)$ суммасы тискәре була?

811 Турыпочмаклык ягының озынлыгы 6 см. Турыпочмаклыкның периметры ягы 4 см булган квадрат периметрыннан кечерәк булсын өчен, аның икенче ягының озынлыгы күпме булырга тиеш?

812 Турыпочмаклы параллелепипед нигезенең буе 12 дм, иңе 5 дм. Аның күләме кабыргасы 9 дм булган кубның күләменнән кечерәк булсын өчен, параллелепипедның биеклеге күпме озынлыкта булырга тиеш?

813 Туристлар моторлы көймәдә елга агымы буйлап киткәннәр, шул урынга, 3 сәг тән дә соңрак калмыйча, кире кайтырга тиешләр. Елганың агым тизлеге 2 км/сәг, ә көймәнең торгын судагы тизлеге 18 км/сәг булса, туристлар нинди ераклыкка китә ала?

Кабатлау өчен күнегүләр

814 $x = 1 - \sqrt{3}$ булганда, $\frac{x^2+x-5}{x-1}$ вакланмасының кыйммәтен табыгыз.

815 Тигезләмәне чишегез:

а) $\frac{x^2-4}{6} - \frac{x}{2} = \frac{x-4}{3}$; б) $\frac{2x^2-1}{2} - x + \frac{1}{2} = 0$.

816 $\frac{12}{x} = x^2$ тигезләмәсен график юл белән чишегез.

817 Моторлы көймә, агым уңаена 30 км барганнан соң, кире кайта. Барлык юлны үтү өчен 5 сәг 20 мин вакыт үтә. Елганың агым тизлеге 3 км/сәг кә тигез булса, көймәнең акмый торган судагы тизлеген табыгыз.

32. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекләр системаларын чишү

Мәсьәлә Турист турбазадан 20 км ераклыктагы станциягә барырга чыга. Әгәр ул тизлеген 1 км/сәг кә арттырса, 4 сәг тә 20 км дан артыграк юл үтәр. Әгәр ул тизлеген 1 км/сәг кә киметсә, хәтта 5 сәг тә дә станциягә барып җитә алмый. Туристның тизлеге күпме?

▶ Туристның тизлеге x км/сәг кә тигез булсын. Әгәр дә турист $(x + 1)$ км/сәг тизлек белән барса, ул 4 сәг эчендә $4(x + 1)$ км юл үтәр. Мәсьәләнең шарты буенча $4(x + 1) > 20$. Әгәр турист $(x - 1)$ км/сәг тизлек белән барса, 5 сәг тә $5(x - 1)$ км юл үтәр. Мәсьәләнең шарты буенча $5(x-1) < 20$.

x ның $4(x + 1)>20$ тигезсезлеге дә, $5(x - 1) < 20$ тигезсезлеге дә дөрес булырлык кыйммәтләрен табарга кирәк. Мондый очракларда тигезсезлекләр системасын чишәргә кирәк диләр һәм аны

$$\begin{cases} 4(x+1) > 20, \\ 5(x-1) < 20 \end{cases}$$

рәвешендә язалар.

Системаның һәр тигезсезлеген аңа тигезкөчле тигезсезлек белән алмаштырып,

$$\begin{cases} x > 4, \\ x < 5 \end{cases}$$

системасын табабыз.

Димәк, x ның билгесез кыйммәте $4 < x < 5$ шартын канәгатьләндерергә тиеш.

Җ а в а п: туристның тизлеге 4 км/сәг тән зуррак, ләкин 5 км/сәг тән кимрәк. ◁

Б и л г е л ә м ә. Системадагы һәр тигезсезлек дөрес булырлык үзгәрешленең кыйммәте бер үзгәрешлеле тигезсезлекләр системасының чишелеше дип атала.

Системаны чишү — аның барлык чишелешләрен табу яки чишелеше булмавын исбатлау ул.

1 нче мисал $\begin{cases} 2x - 1 > 6, \\ 5 - 3x > -13 \end{cases}$

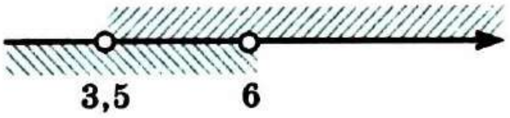
тигезсезлекләр системасын чишеп табабыз:

▶ $$\begin{cases} 2x > 7, \\ -3x > -18. \end{cases}$$

Моннан

$$\begin{cases} x > 3{,}5, \\ x < 6. \end{cases}$$

x ның һәр $x > 3{,}5$ һәм $x < 6$ тигезсезлекләрен канәгатьләндерә торган кыйммәтләре системаның чишелешләре була. $x > 3{,}5$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче саннар күплеген һәм $x < 6$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче саннар күплеген координаталар турысында сурәтләп, ике тигезсезлекнең дә $3{,}5 < x < 6$ булганда дөрес икәнлеген табабыз (рәс. 38). Системаның чишелешләр күплеге $(3{,}5;\ 6)$ аралык була.



Рәс. 38

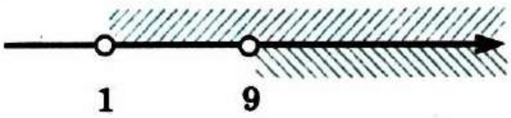
Җавапны $(3{,}5;\ 6)$ саннар аралыгы рәвешендә яки әлеге аралыкны бирүче $3{,}5 < x < 6$ икеле тигезсезлеге рәвешендә язарга мөмкин. ◁

2 нче мисал $\begin{cases} 3x - 2 > 25, \\ 1 - x < 0 \end{cases}$ тигезсезлекләр системасын чишәбез.

▶ Табабыз:

$$\begin{cases} 3x > 27, \\ -x < -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 9, \\ x > 1. \end{cases}$$

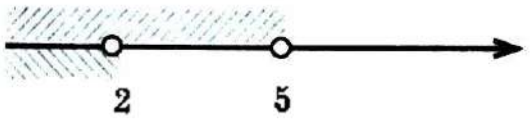


Рәс. 39

Координаталар турысында һәр тигезсезлекнең чишелешләре күплеген сурәтлик (рәс. 39). $x > 9$ булганда ике тигезсезлек тә дөрес. Җавапны $x > 9$ тигезсезлеге рәвешендә яки әлеге тигезсезлек белән бирелгән $(9;\ +\infty)$ санлы тигезсезлеге рәвешендә язарга мөмкин. ◁

3 нче мисал $\begin{cases} 2 - x > 0, \\ 0{,}2x - 1 < 0 \end{cases}$ тигезсезлекләр системасын чишик.

▶ Табабыз:



Рәс. 40

$$\begin{cases}-x > -2,\\ 0,2x < 1;\end{cases}$$

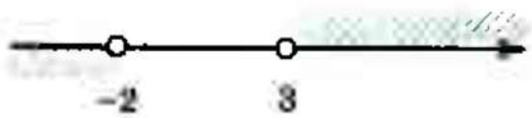
$$\begin{cases}x < 2,\\ x < 5.\end{cases}$$

Координаталар турысыннан файдаланып, $x < 2$ һәм $x < 5$ тигезсезлекләренең гомуми чишелешен, ягъни аларның чишелешләре күплегенең кисешүен табабыз (рәс. 40). Бу күплекләрнең кисешүе $x < 2$ шартын канәгатьләндерүче саннардан тора, ягъни $(-\infty;\ 2)$ саннар аралыгын тәшкил итә.

Җ а в а п: $(-\infty;\ 2)$. ◁

4 нче мисал $\begin{cases}1 - 5x > 11,\\ 6x - 18 > 0\end{cases}$ тигезсезлекләр системасын чишик.

▶ Табабыз:



Рәс. 41

$$\begin{cases}-5x > 10,\\ 6x > 18;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x < -2,\\ x > 3.\end{cases}$$

Координаталар турысыннан файдаланып (рәс. 41), $x < -2$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче саннар күплеге белән $x > 3$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче саннар күплегенең уртак элементлары юк икәнлеген табабыз, ягъни аларның кисешүе буш була. Бирелгән тигезсезлекләр системасының чишелешләре юк.

Җ а в а п: чишелешләре юк. ◁

5 нче мисал $-1 < 3 + 2x < 3$ икеле тигезсезлеген чишәбез.

▶ Икеле тигезсезлек — тигезсезлекләр системасының башкача язылышы ул:

$$\begin{cases}3 + 2x > -1,\\ 3 + 2x < 3.\end{cases}$$

Бу системаны чишкәннән соң, $-2 < x < 0$ булганда, ике тигезсезлекнең дә дөрес икәнен беләбез.

Бу мисалда чишелешне болай язу уңайлы:

$$-1 < 3 + 2x < 3,$$

$$-4 < 2x < 0,$$

$$-2 < x < 0.$$ ◁

Күнегүләр

818 3 саны түбәндәге тигезсезлекләр системасының чишелеше буламы:

а) $\begin{cases} 6x - 1 > x, \\ 4x - 32 < 3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x < 5x + 7, \\ 3x - 1 > 5 - x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x + 4 < 20, \\ 3 - 2x > -1? \end{cases}$

819 −2; 0; 5; 6 саннарының кайсылары

$$\begin{cases} 3x - 22 < 0, \\ 2x - 1 > 3 \end{cases}$$

тигезсезлекләр системасының чишелешләре була?

820 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} x > 17, \\ x > 12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > 0, \\ x < 6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x \ge -1, \\ x \le 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x < 1, \\ x < 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < -3,5, \\ x > 8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x > 8, \\ x \le 20. \end{cases}$

821 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} 2x - 12 > 0, \\ 3x < 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - 10 < 0, \\ 2x > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4y < -4, \\ 5 - y > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6y \ge 42, \\ 4y + 12 \le 0. \end{cases}$

822 Тигезсезлекләр системасын чишегез һәм аның чишелешләре булган берничә санны күрсәтегез:

а) $\begin{cases} x - 0,8 > 0, \\ -5x < 10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 1 > 3x, \\ 5x - 1 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2 - x \le 0, \\ x - 4 \le 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 10x < 2, \\ x > 0,1. \end{cases}$

823 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} 0,4x - 1 \le 0, \\ 2,3x \ge 4,6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0,3x > 4, \\ 0,2x + 1 < 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0,7x - 2,1 < 0, \\ \frac{2}{3}x > 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{5}{6}x - 10 \le 0, \\ 3x \le 1\frac{1}{3}. \end{cases}$

824 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} 0,6x + 7,2 > 0, \\ 5,2 \ge 2,6x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0,2x < 3, \\ \frac{1}{6}x > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1,5x + 4,5 \le 0, \\ \frac{1}{9}x \ge 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 6,5 < 0, \\ \frac{1}{3}x < -1. \end{cases}$

825 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} 2x - 1 < 1,4 - x, \\ 3x - 2 > x - 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 17x - 2 > 12x - 1, \\ 3 - 9x < 1 - x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x + 6 \le x, \\ 3x + 12 \le x + 17; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 25 - 6x \le 4 + x, \\ 3x + 7,7 > 1 + 4x. \end{cases}$

826 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} 57 - 7x > 3x - 2, \\ 22x - 1 < 2x + 47; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 102 - 73z > 2z + 2, \\ 81 + 11z \ge 1 + z; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1 - 12y < 3y + 1, \\ 2 - 6y > 4 + 4y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6 + 6,2x \ge 12 - 1,8x, \\ 2 - x \ge 3,5 - 2x. \end{cases}$

827 Үзгәрешленең мөмкин саналган кыйммәтләрен күрсәтегез:

а) $\sqrt{3 - 2x} + \sqrt{1 - x}$; в) $\sqrt{6 - x} - \sqrt{3x - 9}$;

б) $\sqrt{x} - \sqrt{3x - 1}$; г) $\sqrt{2x + 2} + \sqrt{6 - 4x}$.

828 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} 5(x - 2) - x > 2, \\ 1 - 3(x - 1) < -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 7x + 3 \ge 5(x - 4) + 1, \\ 4x + 1 \le 43 - 3(7 + x); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2y - (y - 4) < 6, \\ y > 3(2y - 1) + 18; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3(2 - 3p) - 2(3 - 2p) > p, \\ 6 < p^2 - p(p - 8). \end{cases}$

829 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} 2(x - 1) - 3(x - 2) < x, \\ 6x - 3 < 17 - (x - 5); \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5,8(1 - a) - 1,8(6 - a) < 5, \\ 8 - 4(2 - 5a) > -(5a + 6); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3,3 - 3(1,2 - 5x) > 0,6(10x + 1), \\ 1,6 - 4,5(4x - 1) < 2x + 26,1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x(x - 1) - (x^2 - 10) < 1 - 6x, \\ 3,5 - (x - 1,5) < 6 - 4x. \end{cases}$

830 Тигезсезлекләр системасын чишегез һәм аның чишелеше булган барлык бөтен саннарны күрсәтегез:

а) $\begin{cases} 3 - 2a < 13, \\ 5a < 17; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2 - 6y < 14, \\ 1 < 21 - 5y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 12 - 6x \le 0, \\ 3x + 1 \le 25 - x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3 - 4x < 15, \\ 1 - 2x > 0. \end{cases}$

831 Тигезсезлекләр системасының бөтен санлы чишелешләрен табыгыз:

а) $\begin{cases} y \ge 0, \\ 7,2 - y \ge 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6 - 4b > 0, \\ 3b - 1 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 12a - 37 > 0, \\ 6a \le 42; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3 - 18x < 0, \\ 0,2 - 0,1x > 0. \end{cases}$

832 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} 2,5a - 0,5(8 - a) < a + 1,6, \\ 1,5(2a - 1) - 2a < a + 2,9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0,7(5a + 1) - 0,5(1 + a) < 3a, \\ 2a - (a - 1,7) > 6,7. \end{cases}$

833 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{x}{4} < 7, \\ 1 - \frac{x}{6} > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{3x-1}{2} - x \le 2, \\ 2x - \frac{x}{3} \ge 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y - \frac{y-1}{2} > 1, \\ \frac{y}{3} < 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2p - \frac{p-2}{5} > 4, \\ \frac{p}{2} - \frac{p}{8} \le 6. \end{cases}$

834 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{3} < 2, \\ \frac{13x-1}{2} > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4 - \frac{y-1}{3} \ge y, \\ \frac{7y-1}{8} \ge 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{3x+1}{2} < -1, \\ \frac{x}{2} - 1 < x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{5a+8}{3} - a \ge 2a, \\ 1 - \frac{6-15a}{4} \ge a. \end{cases}$

835 Икеле тигезсезлекне чишегез:

а) $-3 < 2x - 1 < 3$; в) $2 < 6 - 2y < 5$;

б) $-12 < 5 - x < 17$; г) $-1 < 5y + 4 < 19$.

836 Икеле тигезсезлекне чишегез һәм аның чишелешләре булган өч санны күрсәтегез:

а) $-6,5 \le \frac{7x+6}{2} \le 20,5$; в) $-2 \le \frac{3x-1}{8} \le 0$;

б) $-1 \le \frac{4-a}{3} \le 5$; г) $-2,5 \le \frac{1-3y}{2} \le 1,5$.

837 Икеле тигезсезлекне чишегез:

а) $-1 \le 15x + 14 < 44$; в) $-1,2 < 1 - 2y < 2,4$;

б) $-1 \le \frac{6-a}{3} \le 1$; г) $-2 < \frac{4x-1}{3} \le 0$.

838 а) y ка нинди кыйммәтләр биргәндә, $3y - 5$ икебуынының кыйммәтләре $(-1;\ 1)$ саннар аралыгында ята?

б) b га нинди кыйммәтләр биргәндә, $\frac{5-2b}{4}$ вакланмасының кыйммәтләре $[-2;\ 1]$ саннар аралыгында ята?

839 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} x > 8, \\ x > 7, \\ x > -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y < -1, \\ y < -5, \\ y < 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} m > 9, \\ m > 10, \\ m < 12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} q < 6, \\ q < 5, \\ q < 1. \end{cases}$

840 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} x-4<8, \\ 2x+5<13, \\ 3-x>1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-1<x+3, \\ 5x-1>6-2x, \\ x-5<0. \end{cases}$

841 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} 3-2a<13, \\ a-1>0, \\ 5a-35<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6-4a<2, \\ 6-a>2, \\ 3a-1<8. \end{cases}$

Кабатлау өчен күнегүләр

842 Үзгәрешленең мөмкин саналган кыйммәтен күрсәтегез:

а) $\dfrac{\sqrt{12-25x}}{6}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{5x-11}}$; в) $\dfrac{4x}{\sqrt{(3x-2)^2}}$.

843 n ның, $\dfrac{9n^2+12n+12}{n}$ вакланмасының кыйммәте натураль санга тигез булырлык, барлык натураль кыйммәтләрен табыгыз.

844 а) $S=\frac{1}{2}ah$ булса, h үзгәрешлесен S һәм a аша аңлатыгыз.

б) $\frac{s}{p}=0{,}5m$ булса, p үзгәрешлесен s һәм m аша аңлатыгыз.

в) $s=\frac{at^2}{2}$ һәм $t>0$ булса, t үзгәрешлесен s һәм a аша аңлатыгыз.

845 Велосипедчы тау юлы буйлап 20 км, тигез юлдан 60 км үтеп, барлык юлга 6 сәг вакыт сарыф иткән. Әгәр аның тауга менгәндәге тизлеге тигез урыннан баргандагы тизлегеннән 5 км/сәг кә кимрәк булса, велосипедчы юлның һәр участогында нинди тизлек белән барган?

Контроль сораулар

1 Координаталар турысында төрле рәвештәге санлы аралыкларны сурәтләгез һәм тамгаланышларын языгыз.

2 Тигезсезлекнең чишелеше дип нәрсә атала? 5 саны; 2 саны $3x-11>1$ тигезсезлегенең чишелеше була аламы? Тигезсезлекне чишү нәрсә ул?

3 Тигезсезлекләрне чишүдә файдаланылган тамырдашлык үзлекләрен әйтегез.

4 Тигезсезлекләр системасының чишелеше дип нәрсә атала? 3 саны; 5 саны $\begin{cases} 2x+1>3, \\ 3x<10 \end{cases}$ тигезсезлекләр системасының чишелеше була аламы? Тигезсезлекләр системасын чишү нәрсә ул?

IV бүлеккә өстәмә күнегүләр

11 нче параграфка

846 $m - n$ аермасы
а) $(-2,7)^{15}$; б) $(-3,1)^{36}$ нә тигез икәне билгеле, m һәм n саннарын чагыштырыгыз.

847 Тигезсезлекне исбатлагыз:
а) $(6y-1)(y+2) < (3y+4)(2y+1)$;
б) $(3y-1)(2y+1) > (2y-1)(2+3y)$.

848 a ның теләсә нинди кыйммәте өчен тигезсезлек дөресме:
а) $(a-8)^2 > 0$; в) $-a^2-2 < 0$; д) $(5-a)^2 \geq 0$;
б) $a^2+1 > 0$; г) $-a^2 < 0$; е) $-(a-3)^2 \leq 0$?

849 Тигезсезлекне исбатлагыз:
а) $(x+1)^2 \geq 4x$; в) $4(x+2) < (x+3)^2 - 2x$;
б) $(3b+1)^2 > 6b$; г) $1 + (m+2)^2 > 3(2m-1)$.

850 Тигезсезлекне исбатлагыз:
а) $a^2+b^2+2 \geq 2(a+b)$; б) $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$.

851 $a > 3$ булганда,

$$\left(\frac{a-3}{a+3} - \frac{a+3}{a-3}\right)\left(1+\frac{3}{a}\right)$$

аңлатмасының кыйммәте тискәре икәнен исбатлагыз.

852 $y > 1$ булганда,

$$\frac{y^2+3}{y-1} - \frac{2}{y} : \left(\frac{1}{y^2-y} + \frac{y-3}{y^2-1}\right)$$

аңлатмасының кыйммәте уңай икәнен исбатлагыз.

853 Катер кайсы очракта юлда күбрәк булыр: елга агымы буенча 20 км, агымга каршы 20 км баргандамы әллә акмый торган суда 40 км баргандамы?

854 Өчпочмакның ярымпериметры аның һәр ягыннан зуррак икәнен исбатлагыз.

855 Ягы 10 см булган квадратның мәйданын периметры квадратныкы кебек үк булган теләсә нинди турыпочмаклык мәйданы белән чагыштырыгыз.

856 Өчбуыннан икебуынның квадратын аерып алу юлы белән, тигезсезлекне исбатлагыз:
а) $x^2+2x+2 > 0$; в) $a^2+ab+b^2 \geq 0$;
б) $y^2-6y+10 > 0$; г) $a^2-ab+b^2 \geq 0$.

857 $a > 0$ һәм $b > 0$ булганда, $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$ тигезсезлеге дөрес икәнен исбатлагыз.

858 a, b, c һәм d — нинди дә булса саннар, өстәвенә $a > b$, $c < b$ һәм $c > d$ булсын. a һәм c, b һәм d саннарын чагыштырыгыз.

859 $a+5$, $a-7$, $a+1$ саннарын үсә бару тәртибендә урнаштырыгыз.

860 Әгәр $a > b$ булса, а) $a + 5 > b + 3$; б) $1 - a < 2 - b$ икәнен исбатлагыз.

861 Әгәр $a > b > 0$ булса,
а) $5a > 4b$; в) $-4a < -2b$;
б) $17a > 12b$; г) $-5a < -1{,}2b$
икәнен исбатлагыз.

862 а) Әгәр $a \le b$ һәм c теләсә нинди сан булса, $a + c \le b + c$ икәнен;
б) әгәр $a \le b$ һәм c уңай сан булса, $ac \le bc$ икәнен;
в) әгәр $a \le b$ һәм c тискәре сан булса, $ac \ge bc$ икәнен исбатлагыз.

863 Әгәр дә $a > b$ булса, $a - 1 > b - 1$, $1 - a > 1 - b$, $5 - a < 5 - b$ дип әйтү дөресме?

864 $12 \le y \le 16$ икәне билгеле.
а) $-0{,}5y$; б) $42 - 2y$; в) $\frac{1}{y}+2$ аңлатмасының кыйммәтен бәяләгез.

865 а) Әгәр $0 < a < 1$ һәм $-3 < b < -2$ булса, $a + 2b$;
б) әгәр $7 < a < 10$ һәм $14 < b < 15$ булса, $\frac{1}{2}a - b$ аңлатмасының кыйммәтен бәяләгез.

866 Әгәр $10{,}4 < AB < 10{,}5$ булса, ABC өчпочмагының AB ягына параллель булган урта сызыгының озынлыгын бәяләгез.

867 а) Әгәр $a \le b$ һәм $c \le d$ булса, $a + c \le b + d$;
б) әгәр $0 \le a \le b$ һәм $0 \le c \le d$ булса, $ac \le bd$ икәнен исбатлагыз.

868 Әгәр $3{,}4 \le a \le 3{,}5$ һәм $6{,}2 \le c \le 6{,}3$ булса, нигезләре a см һәм c см булган трапециянең урта сызыгының озынлыгын бәяләгез.

12 нче параграфка

869 а) [−4; 4]; б) (−2,5; 7); в) (4,2; 8,5); г) (−4; 3) аралыкка кергән барлык бөтен саннарны күрсәтегез.

870 а) [−1,8; −1,6]; б) [−3,7; −2,7]
аралыкныкы булган бөтен сан бармы?

871 а) (2,4; 2,8); в) (3,5; 3,6);
б) (−3,8; −3,1); г) (−0,2; −0,1)
аралыкка кергән нинди дә булса санны күрсәтегез.

872 40,9 саны [8; 41) саннар аралыгына керәме? Бу аралыкта 40,9 дан зуррак санны күрсәтеп буламы? [8; 41) саннар аралыгында иң зур сан, иң кечкенә сан бармы?

873 7,01 саны (7; 17] саннар аралыгына керәме? Бу аралыкныкы булган 7,01 дән дә кечерәк санны күрсәтеп буламы? (7; 17] аралыгында иң кечкенә сан бармы; иң зур сан?

874 Түбәндәге саннар аралыгында иң кечкенә һәм иң зур саннар бармы, әгәр булса, ул саннарны күрсәтегез:
а) [12; 37]; б) [8; 13); в) (11; 14); г) [3; 19).

875 Дөресме:

а) $(-5;\ 5) \cap (-3;\ 2) = (-3;\ 2)$;

б) $(4;\ 11) \cup (0;\ 6) = (4;\ 6)$;

в) $(-\infty;\ 4) \cup (1;\ +\infty) = (-\infty;\ +\infty)$;

г) $(-\infty;\ 2) \cap (-2;\ +\infty) = (-2;\ 2)$?

876 Кисешүне һәм берләшмәне табыгыз:

а) бөтен саннар күплегенең һәм уңай саннар күплегенең;

б) рациональ саннар һәм иррациональ саннар күплегенең.

877 4,99 саны $x < 5$ тигезсезлегенең чишелеше буламы? Бу тигезсезлекне канәгатьләндерүче һәм 4,99 дан зуррак нинди дә булса санны күрсәтегез.

878 3,01 саны $x > 3$ тигезсезлегенең чишелеше буламы? Бу тигезсезлекне канәгатьләндерүче 3,01 дән кечерәк булган нинди дә булса санны күрсәтегез.

879 Тигезсезлекне чишегез:

а) $0{,}01(1 - 3x) > 0{,}02x + 3{,}01$;

б) $12(1 - 12x) + 100x > 36 - 49x$;

в) $(0{,}6y - 1) - 0{,}2(3y + 1) < 5y - 4$;

г) $\frac{2}{3}(6x + 4) - \frac{1}{6}(12x - 5) \le 4 - 6x$;

д) $(3a + 1)(a - 1) - 3a^2 > 6a + 7$;

е) $15x^2 - (5x - 2)(3x + 1) < 7x - 8$.

880 a ның нинди кыйммәтләре өчен тигезсезлек дөрес:

а) $\frac{a-1}{4} - 1 > \frac{a+1}{3} + 8$; в) $\frac{1-2a}{4} - 2 < \frac{1-5a}{8}$;

б) $\frac{3a-1}{2} - \frac{a-1}{4} > 0$; г) $\frac{5a}{6} - \frac{3a-1}{3} + \frac{2a-1}{2} < 1$?

881 Тигезсезлекне чишегез:

а) $\frac{x-0{,}5}{4} + \frac{x-0{,}25}{4} + \frac{x-0{,}125}{8} < 0$;

б) $\frac{5-x}{3} - \frac{1-x}{2} > 1$.

882 Тигезсезлекне канәгатьләндерүче барлык натураль саннарны табыгыз:

а) $3(5 - 4x) + 2(14 + x) > 0$;

б) $(x + 1)(x - 1) - (x^2 - 3x) \le 14$.

883 x ның нинди кыйммәтләрендә

а) $\frac{3x-8}{12}$ вакланмасының кыйммәте $\frac{x-1}{4}$ вакланмасының тиңдәш кыйммәтеннән зуррак;

б) $\frac{x+1}{3}$ вакланмасының кыйммәте $\frac{2x+3}{6}$ вакланмасының тиңдәш кыйммәтеннән кечерәк?

884 Тигезсезлекне чишегез:

а) $2(4y-1)-5y<3y+5$; б) $6(1-y)-8(3y+1)+30y>-5$.

885 a ның кыйммәтләре нинди булганда, тигезләмәнең тамыры уңай сан булуын табыгыз:

а) $3x=9a$; в) $x-8=3a+1$;

б) $x+2=a$; г) $2x-3=a+4$.

886 b ның кыйммәтләре нинди булганда, тигезләмәнең тамыры тискәре сан булуын табыгыз:

а) $10x=3b$; в) $3x-1=b+2$;

б) $x-4=b$; г) $3x-3=5b-2$.

887 m ның кыйммәтләре нинди булганда, тигезсезлек дөрес була:

а) $|2m-16|=2m-16$; б) $\frac{|12-6m|}{12-6m}=1$;

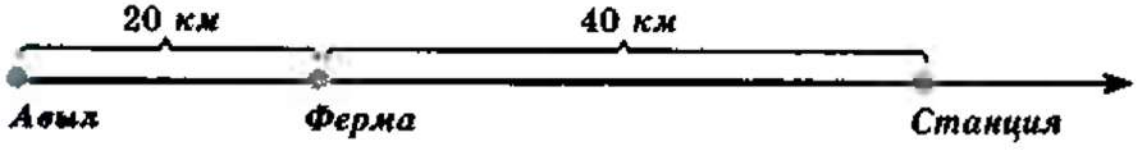
в) $|m+6|=-m-6$; г) $\frac{|10m-35|}{10m-35}=-1$?

888 $y=-6x+12$ функциясе: а) уңай кыйммәтләр алган; б) тискәре кыйммәтләр алган аралыкларны табыгыз. Җавабыгызны график ярдәмендә аңлатыгыз.

889 Складтан 500 әр кг массалы тимер коелмалар һәм 200 әр кг массалы бакыр коелмалар алалар. 4 т дан артык йөк күтәрә алмаган йөк машинасына 12 коелма төйиләр. Шул коелмалар арасында ничә тимер коелма булуы мөмкин?

890 Турист турбазадан 4 км/сәг тизлек белән 24 км ераклыктагы шәһәргә барырга чыга. 2 сәг тән соң аның артыннан икенче турист юлга чыга. Шәһәргә барып җиткәнче беренче туристны куып җитү өчен, икенче турист нинди тизлек белән барырга тиеш?

891 Авылдан фермага кадәр 20 км, ә фермадан станциягә кадәр 40 км (рәс. 42). Фермадан станциягә таба 12 км/сәг тизлек белән велосипедчы чыга. Шул ук вакытта, шул ук юл буйлап авылдан ферма аша станциягә бару өчен, мотоциклчы чыга. Станциягә җиткәнче велосипедчыны куып җитү өчен, мотоциклчы нинди тизлек белән барырга тиеш?



Рәс. 42

892 a ның кыйммәтләре нинди булганда,

$$\begin{cases} x>3, \\ x<a \end{cases}$$

тигезсезлекләр системасының чишелешләре булмый?

893 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases}4x > 1,\\ 5x > 0,\\ x > 9;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x < 0,\\ -x > -1,\\ 4x < 8;\end{cases}$ в) $\begin{cases}-x < 3,\\ 2x > 10,\\ x < -10;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3x > -9,\\ x < -2,\\ -2x > 10.\end{cases}$

894 Тигезсезлекләр системасының чишелешләре булмавын исбатлагыз:

а) $\begin{cases}x^2 + 1 < 0,\\ 3x - 1 > 0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}6x < 0,\\ 3x > 0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}2x - 4 > 2x - 1,\\ 5x > 0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3x + 5 > 0,\\ 3x + 5 < 0.\end{cases}$

895 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases}0,3x - 1 < x + 0,4,\\ 2 - 3x < 5x + 1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3(x-2)(x+2) - 3x^2 < x,\\ 5x - 4 > 4 - 5x;\end{cases}$

б) $\begin{cases}2,5x - 0,12 > 0,6x + 0,07,\\ 1 - 2x > -x - 4;\end{cases}$ д) $\begin{cases}(x-4)(5x-1) - 5x^2 > x + 1,\\ 3x - 0,4 < 2x - 0,6;\end{cases}$

в) $\begin{cases}2x + 1,4 < \frac{3x-7}{5},\\ 2x > 3 - \frac{2x}{5};\end{cases}$ е) $\begin{cases}1 + \frac{1+x}{3} > \frac{2x-1}{6} - 2,\\ 3x - \frac{x}{4} > 4.\end{cases}$

896 Тигезсезлекләр системасының бөтен санлы чишелешләрен табыгыз:

а) $\begin{cases}6x(x-1) - 3x(2x-1) < x,\\ 0,5x - 3,7 < 0,2x - 0,7;\end{cases}$

б) $\begin{cases}0,7x - 3(0,2x+1) \le 0,5x + 1,\\ 0,3(1-x) + 0,8x \ge x + 5,3;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\frac{1}{3}(3x-2) + \frac{1}{6}(12x+1) > 0,\\ \frac{1}{7}(14x-21) + \frac{2}{9}(9x-6) < 0;\end{cases}$

г) $\begin{cases}0,2(5x-1) + \frac{1}{3}(3x+1) < x + 5,8,\\ 8x - 7 - \frac{1}{6}(6x-2) > x.\end{cases}$

897 Икеле тигезсезлекне чишегез:

а) $-9 < 3x < 18$; в) $3 \le 5x - 1 \le 4$;

б) $1 < \frac{2x-1}{2} < 2$; г) $0 \le \frac{1-x}{3} \le 1$.

898 а) x ның кыйммәтләре нинди булганда, $2x - 4$ аңлатмасының кыйммәте $(-1;\ 5)$ саннар аралыгында була?

б) x ның кыйммәтләре нинди булганда, $\frac{x-5}{2}$ вакланмасының кыйммәте $[0;\ 5]$ саннар аралыгында була?

в) x нинди булганда, $y = -\frac{1}{3}x + 8$ функциясе кыйммәтләре $(-1;\ 1)$ аралыгыныкы булыр?

г) x нинди булганда, $y = -2{,}5x + 6$ функциясенең кыйммәтләре $[-6;\ -2]$ аралыгыныкы булыр?

899 y ның түбәндәге тигезсезлекләр системасын канәгатьләндерүче уңай кыйммәтләрен табыгыз:

а) $\begin{cases} 3(y-1) - 4(y+8) < 5(y+5), \\ 1,2(1+5y) - 0,2 < 5(1-3y) - 3y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 15(y-4) - 14(y-3) < y(y-9) - y^2, \\ \frac{5-y}{3} - y > 14 - \frac{2-y}{6}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (2y-1)(3y+2) - 6y(y-4) < 48, \\ \frac{y-1}{8} - \frac{6y+1}{4} - 1 < 0. \end{cases}$

900 y ның түбәндәге тигезсезлекләр системасын канәгатьләндерүче тискәре кыйммәтләрен табыгыз:

а) $\begin{cases} \frac{5y-1}{6} - \frac{2y-1}{2} > 0, \\ 1 - \frac{y+4}{3} < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (y+6)(5-y) + y(y-1) > 0, \\ 0,3y(10y+20) - 3y^2 + 30 > 0. \end{cases}$

901 Поезд юлның беренче яртысын 60 км/сәг тизлек белән үткән, ә аннан соң тизлеген арттырган. Әгәр барлык юлда поездның уртача тизлеге 72 км/сәг тән артмаган булса, юлның икенче яртысында поездның тизлеге күпме булырга мөмкин?

902 Әгәр дә туристлар көненә 5 км артык үтсәләр, алар 6 көндә 90 км дан артыграк юл үтәрләр, әгәр дә көненә 5 км кимрәк үтсәләр, 8 көн эчендә 90 км дан кимрәк юл үтәрләр иде. Туристлар бер көндә ничә километр юл үткәннәр?

V бүлек

Бөтен күрсәткечле дәрәҗә

§ 13 Бөтен күрсәткечле дәрәҗә һәм аның үзлекләре

33. Бөтен тискәре күрсәткечле дәрәҗәнең билгеләмәсе

Белешмәләр китабында Кояшның массасы $1{,}985 \cdot 10^{33}$ г га, водород атомының массасы $1{,}674 \cdot 10^{-24}$ г га тигез дигән мәгълүматларны укырга мөмкин. 10^{33} язылышы һәркайсы 10 га тигез булган утыз өч тапкырлаучының тапкырчыгышын аңлата. Ә 10^{-24} язылышының мәгънәсе нинди?

10 санының әзлекле килгән дәрәҗәсен 0, 1, 2 һ. б. күрсәткечләр аша языйк:

$$10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots . \qquad (1)$$

рәвешендәге юл барлыкка килер.

Бу юлдагы һәр сан үзеннән соң килгән саннан 10 тапкырга кечерәк. Шушы ук закон буенча (1) юлын сулга таба дәвам итсәк, 10^0 саны алдына $\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$ санын, $\frac{1}{10}$ саны алдыннан $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$ санын, $\frac{1}{10^2}$ саны алдына $\frac{1}{10^3}$ санын һ. б. язарга кирәк. Ул вакытта түбәндәге юлны табарбыз:

$$\dots, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots . \qquad (2)$$

(2) юлында 10^0 саныннан уңда һәр дәрәҗәнең күрсәткече аннан соң килгән дәрәҗә күрсәткеченнән 1 гә кимрәк. Бу законны 10^0 саныннан сулда торган саннарга карата кулланып, аларны тискәре күрсәткечле 10 санының дәрәҗәсе

рәвешендә язарга була. $\frac{1}{10^1}$ урынына 10^{-1} дип, $\frac{1}{10^2}$ урынына 10^{-2} дип, $\frac{1}{10^3}$ урынына 10^{-3} һ. б. дип язабыз:

$$\ldots, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \ldots.$$

Шулай итеп, 10^{-1} сен $\frac{1}{10^1}$ сен, 10^{-2} сен $\frac{1}{10^2}$ сен, 10^{-3} сен $\frac{1}{10^3}$ сен һ. б. ны аңлата. Мондый килешү нульдән башка теләсә нинди нигезле дәрәҗәләр өчен кабул ителә.

Билгеләмә. Әгәр дә $a \neq 0$ һәм n тискәре бөтен сан булса, ул вакытта

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

Дәрәҗәнең билгеләмәсеннән файдаланып,

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}; \quad (-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81};$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = -8$$

икәнен табабыз.

n тискәре бөтен сан булганда ($n = 0$ булгандагы кебек), 0^n аңлатмасының мәгънәсе булмый.

n натураль сан булганда, әлеге аңлатманың мәгънәсе бар һәм аның кыйммәте нульгә тигез.

Башта тикшерелгән мисалга кайтыйк. Без хәзер водород атомы массасын күрсәткән $1{,}674 \cdot 10^{-24}$ г язылышының нәрсә аңлатканын беләбез:

$$1{,}674 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 1{,}674 \cdot \frac{1}{10^{24}} \text{ г} = 1{,}674 : 10^{24} \text{ г} =$$

$$= \underbrace{0{,}000\ldots0}_{24 \text{ нуль}}1674 \text{ г}.$$

Күнегүләр

903 Тискәре бөтен сан күрсәткечле дәрәҗәне вакланма белән алмаштырыгыз:

а) 10^{-6}; б) 9^{-2}; в) a^{-1}; г) x^{-20}; д) $(ab)^{-3}$; е) $(a+b)^{-4}$.

904 Вакланманы тискәре бөтен сан күрсәткечле дәрәҗә белән алмаштырыгыз:

а) $\frac{1}{10^2}$; б) $\frac{1}{6^7}$; в) $\frac{1}{x^7}$; г) $\frac{1}{y^{10}}$; д) $\frac{1}{7}$.

905 а) 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ һәм $\frac{1}{8}$ саннарын нигезе 2 булган дәрәҗә рәвешендә күрсәтегез;

б) $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{5}$, 1, 5, 25, 125 саннарын нигезе 5 булган дәрәҗә рәвешендә күрсәтегез.

906 а) $\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}$, 1, 3, 9, 27, 81 саннарын нигезе 3 булган дәрәҗә рәвешендә күрсәтегез;

б) 100, 10, 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001 саннарын нигезе 10 булган дәрәҗә рәвешендә күрсәтегез.

907 Исәпләп чыгарыгыз:

а) 4^{-2}; г) $(-1)^{-20}$; ж) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-5}$; и) $0{,}01^{-2}$;

б) $(-3)^{-3}$; д) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$; з) $\left(-2\frac{2}{5}\right)^{-2}$; к) $1{,}125^{-1}$.

в) $(-1)^{-9}$; е) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$;

908 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) -10^{-4}; в) $(-0{,}8)^{-2}$; д) $-(-2)^{-3}$;

б) $-0{,}2^{-3}$; г) $(-0{,}5)^{-5}$; е) $-(-3)^{-2}$.

909 Исәпләп чыгарыгыз:

а) $(-4)^{-3}$; в) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$; д) $-0{,}4^{-4}$;

б) $2{,}5^{-1}$; г) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-3}$; е) $-\left(2\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

910 Дәрәҗәнең кыйммәтен нуль белән чагыштырыгыз:

а) 9^{-5}; б) $2{,}6^{-4}$; в) $(-7{,}1)^{-6}$; г) $(-3{,}9)^{-3}$.

911 Түбәндәгеләр дөресме:

а) әгәр $a > 0$ һәм n бөтен сан булса, $a^n > 0$ була;

б) әгәр $a < 0$ һәм n тискәре җөп сан булса, $a^n > 0$ була;

в) $a < 0$ һәм n тискәре так сан булса, $a^n < 0$ була?

912 Әгәр дә

а) $x = -7$; $p = -2$; в) $x = 2$, $p = -6$;

б) $x = 8$, $p = -1$; г) $x = -9$, $p = 0$

булса, x^p аңлатманың кыйммәтен табыгыз.

913 Әгәр дә

а) $x = -1$, $p = -2$; в) $x = 2$, $p = -1$;

б) $x = 0{,}5$, $p = -2$; г) $x = 0{,}5$, $p = -5$

булса, $-x^p$ аңлатма нинди кыйммәт кабул итә?

914 Әгәр дә

а) $x = \frac{2}{3}$, $n = -2$; б) $x = -1{,}5$, $n = 3$

булса, x^n һәм x^{-n} аңлатмаларының кыйммәтен табыгыз.

915 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $8 \cdot 4^{-3}$; г) $10 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$; ж) $0{,}5^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$;

б) $-2 \cdot 10^{-5}$; д) $3^{-2} + 4^{-1}$; з) $0{,}3^0 + 0{,}1^{-4}$.

в) $18 \cdot (-9)^{-1}$; е) $2^{-3} - (-2)^{-4}$;

916 Исәпләп чыгарыгыз:

а) $6 \cdot 12^{-1}$; в) $6^{-1} - 3^{-2}$; д) $12 - \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$;

б) $-4 \cdot 8^{-2}$; г) $1{,}3^0 - 1{,}3^{-1}$; е) $25 + 0{,}1^{-2}$.

917 Аңлатманы тискәре күрсәткечле дәрәҗәне эченә алмаган вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $3x^{-5}$; в) $5ab^{-7}$; д) $x^{-1}c^{-3}$; ж) $2(x+y)^{-4}$;

б) $x^{-4}y$; г) $5(ab)^{-7}$; е) $-9yz^{-8}$; з) $10x^{-1}(x-y)^{-3}$.

918 Тискәре күрсәткечтән файдаланып, вакланманы тапкырчыгыш рәвешендә күрсәтегез:

а) $\frac{3}{b^2}$; в) $\frac{2a^8}{c^5}$; д) $\frac{1}{x^2y^3}$; ж) $\frac{2a}{(a-2)^2}$;

б) $\frac{x}{y}$; г) $\frac{a^5}{7b^3}$; е) $\frac{(a+b)^2}{b^4c^4}$; з) $\frac{(c+b)^5}{2(a-b)^4}$.

919 Аңлатманы вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $a^{-2}+b^{-2}$; в) $(a+b^{-1})(a^{-1}-b)$;

б) $xy^{-1}+xy^{-2}$; г) $(x-2y^{-1})(x^{-1}+2y)$.

920 Аңлатманы вакланмага әйләндерегез:

а) $(a^{-1}+b^{-1})(a+b)^{-1}$; б) $(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2})$.

Кабатлау өчен күнегүләр

921 8,175; 0,4361 һәм 52,25 вакланмаларының һәркайсын унынчы өлешләргә кадәр түгәрәкләгез. Абсолют хатаны табыгыз.

922 Турист, велосипедта шоссе юлдан 28 км, таш җәелмәгән юлдан 25 км юл үтеп, барысына 3 сәг 36 мин вакыт сарыф иткән. Әгәр туристның тизлеге шоссе юлда, таш җәелмәгән юлдагыга караганда, 1,4 тапкыр зуррак булса, ул таш җәелмәгән юлдан нинди тизлек белән барган?

923 Тигезсезлекне чишегез:

а) $(2x-1)(2x+1)-4x(x+6)<x-6$;

б) $(6x-1)^2-12x(5+3x)<8,2$.

924 $y=-5x-10,15$ функциясе кайсы аралыкта тискәре кыйммәтләр ала?

34. Бөтен күрсәткечле дәрәҗәнең үзлекләре

Сезгә билгеле булган натураль күрсәткечле дәрәҗә үзлекләре теләсә нинди бөтен күрсәткечле дәрәҗәләр өчен дә дөрес (бары тик дәрәҗәнең нигезе нульгә тигез булмаган сан дип уйларга кирәк).

Теләсә нинди $a \neq 0$ һәм теләсә нинди бөтен m һәм n өчен

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (1)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}; \quad (3)$$

теләсә нинди $a \neq 0$, $b \neq 0$ һәм теләсә нинди бөтен n өчен

$$(ab)^n = a^nb^n, \quad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad (5)$$

Бу үзлекләрне тискәре бөтен күрсәткечле дәрәҗә билгеләмәсенә һәм натураль күрсәткечле дәрәҗә үзлекләренә таянып исбат итәргә мөмкин.

Мәсәлән, (1) үзлегенең (дәрәҗәнең төп үзлеге) дөреслеген дәрәҗә күрсәткечләре тискәре бөтен саннар булган очрак өчен исбатлыйк. Икенче төрле әйткәндә,

$a^{-k} \cdot a^{-p} = a^{-k-p}$ икәнен исбатлыйк (биредә $a \neq 0$, k һәм p — натураль саннар).

Табабыз:

$$a^{-k} \cdot a^{-p} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^k \cdot a^p} = \frac{1}{a^{k+p}} = a^{-(k+p)} = a^{-k-p}.$$

a^{-k} һәм a^{-p} дәрәҗәләрен $\frac{1}{a^k}$ һәм $\frac{1}{a^p}$ вакланмалары белән һәм $\frac{1}{a^{k+p}}$ вакланмасын $a^{-(k+p)}$ дәрәҗәсе белән алмаштырганда, без тискәре бөтен күрсәткечле дәрәҗәнең билгеләмәсеннән файдаландык. Ә $a^k a^p$ тапкырчыгышын a^{k+p} дәрәҗәсе белән алмаштырганда, натураль күрсәткечле дәрәҗәнең төп үзлегеннән файдаландык.

Дәрәҗәләрнең үзлекләреннән бөтен күрсәткечле дәрәҗәләр белән гамәлләрнең натураль күрсәткечле дәрәҗәләр белән гамәлләр кагыйдәләре буенча башкарылуы килеп чыга.

1 нче мисал $a^{-17} \cdot a^{21}$ тапкырчыгышының рәвешен үзгәртик.

▶ Нигезләре бертөрле булган дәрәҗәләрне тапкырлаганда, шул ук нигезне калдырып, дәрәҗә күрсәткечләрен кушалар. Шулай булгач,

$$a^{-17} \cdot a^{21} = a^{-17+21} = a^4. \triangleleft$$

2 нче мисал $b^2 : b^5$ өлешенең рәвешен үзгәртик.

▶ Нигезләре бертөрле булган дәрәҗәләрне бүлгәндә, нигезнең үзен калдырып, бүленүченең дәрәҗә күрсәткеченнән бүлүченең дәрәҗә күрсәткечен алалар.

Табабыз:

$$b^2 : b^5 = b^{2-5} = b^{-3}. \triangleleft$$

Натураль күрсәткечле дәрәҗәләр өчен нигезләре бертөрле булган дәрәҗәләрне бүлү кагыйдәсен без бүленүченең дәрәҗә күрсәткече бүлүченең дәрәҗә күрсәткеченнән кечкенә булмаган очрак өчен куллана алдык. Хәзер, бөтен күрсәткечле дәрәҗәләрне өйрәнгәннән соң, бу чикләү бетә: бүленүченең һәм бүлүченең дәрәҗә күрсәткечләре теләсә нинди бөтен сан булырга мөмкин.

3 иче мисал $(2a^3b^{-5})^{-2}$ аңлатмасын гадиләштерик.

▶ Тапкырчыгышны дәрәҗәгә күтәргәндә, һәр тапкырлаучыны әлеге дәрәҗәгә күтәреп, нәтиҗәләрен тапкырлыйлар. Дәрәҗәне дәрәҗәгә күтәргән вакытта, нигезнең үзен калдырып, күрсәткечләрен тапкырлыйлар. Язабыз:

$$(2a^3b^{-5})^{-2} = 2^{-2} \cdot (a^3)^{-2} \cdot (b^{-5})^{-2} = \frac{1}{4}a^{-6}b^{10}. \triangleleft$$

Күнегүләр

925 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $3^{-4} \cdot 3^6$; г) $2^{10} : 2^{12}$; ж) $(2^{-4})^{-1}$;
б) $2^4 \cdot 2^{-3}$; д) $5^{-3} : 5^{-3}$; з) $(5^2)^{-2} \cdot 5^3$;
в) $10^8 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6}$; е) $3^{-4} : 3$; и) $3^{-4} \cdot (3^{-2})^{-4}$.

926 Исәпләп чыгарыгыз:

а) $5^{-15} \cdot 5^{16}$; в) $4^{-8} : 4^{-9}$; д) $(2^{-2})^{-3}$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{4}$; е) $(0{,}1^{-3})^{-1}$.

927 Капма-каршы күрсәткечле нульгә тигез булмаган теләсә нинди санның дәрәҗәләре үзара кире икәнен исбатлагыз.

928 Теләсә нинди бөтен n өчен $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$ икәнен исбатлагыз, $a \neq 0$ һәм $b \neq 0$.

929 Исәпләп чыгарыгыз:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$; в) $0{,}01^{-2}$; д) $0{,}002^{-1}$;

б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$; г) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-4}$; е) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-5}$.

930 Әгәр a һәм b — уңай саннар һәм $a > b$ булса, $a^{-1} < b^{-1}$ икәнен исбатлагыз.

931 Аңлатманы нигезе 3 булган дәрәҗә рәвешенә китерегез һәм аның кыйммәтен табыгыз.

а) $27 \cdot 3^{-4}$; б) $(3^{-1})^5 \cdot 81^2$; в) $9^{-2} : 3^{-6}$; г) $81^3 : (9^{-2})^{-3}$.

932 Аңлатманы нигезе 2 булган дәрәҗә рәвешенә китерегез һәм аның кыйммәтен табыгыз:

а) $\frac{1}{16} \cdot 2^{10}$; б) $32 \cdot (2^{-4})^2$; в) $8^{-1} \cdot 4^3$; г) $4^5 \cdot 16^{-2}$.

933 Аңлатманы нигезе 5 булган дәрәҗә рәвешендә күрсәтегез (аңлатмада m — бөтен сан):

а) $5^m \cdot 5^{m+1} \cdot 5^{1-m}$; б) $(5^m)^2 \cdot (5^{-3})^m$; в) $625 : 5^{4m-2}$.

934 Исәпләп чыгарыгыз:

а) $8^{-2} \cdot 4^{3}$; г) $125^{-4} : 25^{-5}$; ж) $\frac{3^{-10} \cdot 9^{6}}{(-3)^{2}}$;

б) $9^{-6} \cdot 27^{5}$; д) $\frac{2^{-21}}{4^{-5} \cdot 4^{-6}}$; з) $\frac{5^{-5} \cdot 25^{10}}{125^{3}}$.

в) $10^{0} : 10^{-3}$; е) $\frac{4^{-2} \cdot 8^{-6}}{2^{-22}}$;

935 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

а) $125^{-1} \cdot 25^{2}$; в) $(6^{2})^{6} : 6^{14}$; д) $\frac{(2^{3})^{5} \cdot (2^{-6})^{2}}{4^{2}}$;

б) $16^{-3} \cdot 4^{6}$; г) $12^{0} : (12^{-1})^{2}$; е) $\frac{(3^{-2})^{3} \cdot 9^{4}}{(3^{3})^{2}}$.

936 x^{-10} аңлатмасын нинди дә булса өч ысул белән дәрәҗәләрнең тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтегез.

937 a^{12} аңлатмасын (биредә $a \neq 0$):

а) a^{4} нигезе булган; б) a^{-6} нигезе булган дәрәҗә рәвешендә күрсәтегез.

938 Нигезе x булган дәрәҗә рәвешендә күрсәтегез:

а) $x^{10} : x^{12}$;
б) $x^{0} : x^{-5}$;
в) $x^{n-1} : x^{-8}$, биредә n — бөтен сан;
г) $x^{6} : x^{n+2}$, биредә n — бөтен сан.

939 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $1{,}5ab^{-3} \cdot 6a^{-2} \cdot b$; г) $3{,}2x^{-1}y^{-5} \cdot \frac{5}{8}xy$;

б) $\frac{3}{4}m^{-2}n^{4} \cdot 8m^{3}n^{-2}$; д) $\frac{1}{2}p^{-1} \cdot q^{-3} \cdot \frac{1}{6}p^{2}q^{-5}$;

в) $0{,}6c^{2}d^{4} \cdot \frac{1}{3}c^{-2}d^{-4}$; е) $3\frac{1}{3}a^{5}b^{-18} \cdot 0{,}6a^{-1}b^{20}$.

940 а) $a = -0{,}125$, $b = 8$ булганда, $0{,}2a^{-2}b^{4} \cdot 5a^{3}b^{-3}$;

б) $a = \frac{1}{7}$, $b = \frac{1}{14}$ булганда, $\frac{1}{27}a^{-1}b^{-5} \cdot 81a^{2}b^{4}$

аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

941 Аңлатманы гадиләштерегез һәм

а) $x = -0{,}2$, $y = 0{,}7$ булганда, $1{,}6x^{-1}y^{12} \cdot 5x^{3}y^{-11}$;

б) $x = 127$, $y = \frac{1}{5}$ булганда, $\frac{5}{6}x^{-3}y^{3} \cdot 30x^{3}y^{-4}$

аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

942 Дәрәҗәне тапкырчыгыш рәвешендә күрсәтегез:

а) $(a^{-1}b^{-1})^{-2}$; в) $(0{,}5a^{-3}b^{5})^{-12}$; д) $\left(-\frac{1}{3}p^{-2}q^{2}\right)^{-3}$;

б) $(x^{3}y^{-1})^{2}$; г) $(-2m^{5}n^{-3})^{2}$; е) $(-0{,}5x^{-3}y^{4})^{3}$.

943 Тапкырчыгыш рәвешендә күрсәтегез:

а) $(6a^{-5}b)^{-1}$;   в) $\left(\frac{7}{8}p^{-6}q\right)^{-1}$;

б) $\left(\frac{3}{4}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2}$;   г) $(-0,3x^{-5}y^{4})^{-2}$.

944 Аңлатманы тапкырчыгышның дәрәҗәсе рәвешендә күрсәтегез:

а) $0,0001x^{-4}$;   в) $0,0081a^{8}b^{-12}$;

б) $32y^{-5}$;   г) $10^{n}x^{-2n}y^{3n}$, биредә n — бөтен сан.

945 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{12x^{-5}}{y^{-6}} \cdot \frac{y}{36x^{-9}}$;   в) $\frac{5x^{-1}y^{3}}{3} \cdot \frac{9x^{6}}{y^{-2}}$;

б) $\frac{63a^{2}}{2b^{-5}} \cdot \frac{18b^{2}}{7a}$;   г) $\frac{16p^{-1}q^{2}}{5} \cdot \frac{25p^{6}}{64q^{-8}}$.

946 Аңлатманың рәвешен үзгәртегез:

а) $\frac{13x^{-2}}{y} \cdot \frac{y^{12}}{39x^{-3}}$;   в) $\frac{p}{3c^{-2}} \cdot \frac{15c}{p^{-2}}$;

б) $\frac{5a^{5}}{b^{-7}} \cdot \frac{7b^{-3}}{25a}$;   г) $\frac{26x^{17}}{y^{-6}} \cdot \frac{y}{13x^{25}}$.

947 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $(0,25x^{-4}y^{-3})^{2} \cdot \left(\frac{x^{-3}}{4y^{2}}\right)^{-3}$;   в) $\left(\frac{c^{-4}}{10a^{5}b^{2}}\right)^{-2} \cdot (5a^{3}bc^{2})^{-2}$;

б) $\left(\frac{a^{-3}b^{4}}{9}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{a^{-2}b^{3}}\right)^{-3}$;   г) $\left(\frac{x^{2}y^{-3}}{6z}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{x^{2}y^{-2}}{9z}\right)^{2}$.

948 Аңлатманың рәвешен үзгәртегез:

а) $\left(\frac{2x^{-1}}{3y^{-2}}\right)^{-2} \cdot 12xy^{5}$;   в) $(2a^{-2}b^{3})^{2} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-6}$;

б) $4a^{7}b^{-1} \cdot \left(\frac{ab}{5}\right)^{-1}$;   г) $\left(\frac{2x^{2}}{y^{3}}\right)^{-1} \cdot (x^{-1}y)^{3}$.

Кабатлау өчен күнегүләр

949 Миллиметрлы бүлемтекле линейка ярдәмендә кисемтә озынлыкларының якынча кыйммәтләре сантиметрларда күрсәтелә. Әгәр а) $AB = 7,2$; б) $MN = 0,2$ булса, якынча кыйммәтнең абсолют һәм чагыштырма хатасын бәяләгез.

950 9 км озынлыгындагы сукмак буенча тауга менү һәм шул ук сукмак буенча таудан кире төшү өчен туристларга 5 сәг вакыт кирәк булды. Кире кайтканда туристларның тизлеге 1,5 тапкыр артыграк булуы билгеле. Алар тауга нинди тизлек белән күтәрелгәннәр?

951 a ның түбәндәге аңлатманы:

а) $\frac{2a-5}{a-1}$ 2 гә тигез; б) $\frac{5a+7}{3a-11}$ 2 гә тигез итә торган кыйммәте бармы?

952 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} \frac{2x}{5} - \frac{x-1}{3} > 1, \\ 3,6x < 1 + 2,6x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3x+1}{2} - \frac{2-6x}{5} < 0, \\ 4,2x < 2,2x + 5. \end{cases}$

953 Аңлатманың кыйммәтен нуль белән чагыштырыгыз:

а) $\frac{4\sqrt{5}-\sqrt{30}}{5}$; б) $\frac{-6}{\sqrt{70}-2\sqrt{8}}$.

35. Санның стандарт рәвеше

Фән һәм техникада бик зур уңай саннар очраган кебек, бик кечкенә уңай саннар да очрый. Мәсәлән, Җирнең күләме шактый зур сан — 1 083 000 000 000 км^3 белән, ә су молекуласының диаметры шактый кечкенә сан 0,0000000003 м белән аңлатыла.

Гадәттәге унарлы рәвешләрендә зур һәм кечкенә саннарны укуы һәм язуы җайсыз, алар белән нинди дә булса гамәл башкару да кыен. Мондый очракта санны $a \cdot 10^n$ рәвешендә күрсәтү җайлы. Мәсәлән,

$$125\,000 = 0,125 \cdot 10^6; \quad 0,0031 = 3,1 \cdot 10^{-3};$$

$$0,237 = 23,7 \cdot 10^{-2}.$$

1 083 000 000 000 һәм 0,0000000003 саннарын берәмлек һәм ун арасында торган сан белән 10 санының дәрәҗәсе тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтәбез:

$$1\,083\,000\,000\,000 = 1,083 \cdot 10^{12};$$

$$0,0000000003 = 3 \cdot 10^{-10}.$$

Боларны 1 083 000 000 000 һәм 0,0000000003 саннарының *стандарт рәвештә* язылышы, диләр. Теләсә нинди уңай санны мондый рәвештә язарга мөмкин.

a санының $a \cdot 10$ рәвешендәге язылышын a санының стандарт рәвеше дип атыйлар, биредә $1 \le a < 10$ һәм n — бөтен сан. n саны a *санының тәртибе* дип атала.

Мәсәлән, Җирнең күләмен куб километрларда аңлата торган санның тәртибе 12 гә, ә су молекуласы диаметрын метрлар белән аңлата торган санның тәртибе −10 га тигез.

Санның тәртибе бу санны күзалларга мөмкинлек бирә. Мәсәлән, әгәр дә a санының тәртибе 3 кә тигез булса, бу $1000 \le a < 10\,000$ икәнен аңлата. Әгәр a санының тәртибе −2 гә тигез булса, $0{,}01 \le a < 0{,}1$ дигән сүз. Санның тәртибе уңай зур сан булса, бу аның бик зур икәнен күрсәтә. Модуле буенча зур булган тискәре тәртип саны санның бик кечкенә икәнен күрсәтә.

1 нче мисал $a = 4\,350\,000$ санын стандарт рәвештә күрсәтик.

▶ a санында өтерне бөтен өлешендә кыйммәтле бер цифр булырлык итеп куябыз. Нәтиҗәдә 4,35 саны табылыр. Уңнан 6 цифрны өтер белән аерып, без x санын 10^6 тапкыр кечерәйттек. Шуңа күрә a саны 4,35 саныннан 10^6 тапкыр зуррак. Моннан

$$a = 4{,}35 \cdot 10^6. \quad \triangleleft$$

2 нче мисал $a = 0{,}000508$ санын стандарт рәвештә языйк.

▶ a санында өтерне бөтен өлештә кыйммәтле бер цифр булырлык итеп күчерәбез. Нәтиҗәдә 5,08 саны табылыр. Өтерне 4 тамгага уңга күчереп, без a санын 10^4 тапкыр зурайттык. Шуңа күрә a саны 5,08 саныннан 10^4 тапкыр кимрәк. Моннан

$$a = 5{,}08 : 10^4 = 5{,}08 \cdot \frac{1}{10^4} = 5{,}08 \cdot 10^{-4}. \quad \triangleleft$$

3 нче мисал $1{,}701 \cdot 10^3$ сен $3{,}78 \cdot 10^{-2}$ сенә бүләбез:

▶ Табабыз:

$$(1{,}701 \cdot 10^3) : (3{,}78 \cdot 10^{-2}) = \frac{1{,}701 \cdot 10^3}{3{,}78 \cdot 10^{-2}}.$$

Вакланманың санаучысын һәм ваклаучысын 10^2 сенә тапкырлап һәм 1,701 не 3,78 гә бүлеп табабыз:

$$\frac{1{,}701 \cdot 10^3}{3{,}78 \cdot 10^{-2}} = 0{,}45 \cdot 10^5 = 4{,}5 \cdot 10^4. \quad \triangleleft$$

Күнегүләр

954 Стандарт рәвештә бирелгән санның тәртибен әйтегез:

а) $1{,}2 \cdot 10^9$; в) $2{,}7 \cdot 10^{-3}$; д) $4{,}42 \cdot 10^5$;

б) $3{,}6 \cdot 10^3$; г) $6{,}3 \cdot 10^{-1}$; е) $9{,}28 \cdot 10^{-4}$.

955 Санны стандарт рәвештә языгыз:

а) 52 000 000; в) 675 000 000; д) 0,00281;
б) 2 180 000; г) 40,44; е) 0,0000035.

956 Стандарт рәвештә языгыз:

а) $45 \cdot 10^3$; б) $117 \cdot 10^5$; в) $0,74 \cdot 10^6$; г) $0,06 \cdot 10^5$.

957 Санны стандарт рәвештә күрсәтегез:

а) 1 024 000; д) 0,000004;
б) 6 000 000; е) 0,000282;
в) 21,56; ж) $508 \cdot 10^{-7}$;
г) 0,85; з) $0,042 \cdot 10^2$.

958 Җирнең массасы 6 000 000 000 000 000 000 000 т, ә водород атомының массасы 0,000 000 000 000 000 000 0017 г. Җирнең массасын һәм водород атомының массасын стандарт рәвештә языгыз.

959 а) $3,8 \cdot 10^3$ т ны граммларда;
б) $1,7 \cdot 10^{-4}$ км ны сантиметрларда;
в) $8,62 \cdot 10^{-1}$ кг ны тонналарда;
г) $5,24 \cdot 10^6$ см ны метрларда күрсәтегез.

960 а) $2,85 \cdot 10^8$ см ны километрларда;
б) $4,6 \cdot 10^{-2}$ м ны миллиметрларда;
в) $6,75 \cdot 10^{15}$ г ны тонналарда;
г) $1,9 \cdot 10^{-2}$ т ны килограммнарда күрсәтегез.

961 Тапкырлагыз:

а) $(3,25 \cdot 10^2) \cdot (1,4 \cdot 10^3)$; б) $(4,4 \cdot 10^{-3}) \cdot (5,2 \cdot 10^4)$.

962 Бүлү гамәлен башкарыгыз:

а) $(9,9 \cdot 10^2) : (1,2 \cdot 10^{-1})$; б) $(1,23 \cdot 10^{-3}) : (4,8 \cdot 10^{-2})$.

963 Гамәлне башкарыгыз:

а) $(2,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (8,4 \cdot 10^4)$; б) $(3,6 \cdot 10^5) : (2,4 \cdot 10^2)$.

964 Яктылык $2,8 \cdot 10^6$ с та күпме юл үтәр (яктылык тизлеге $3 \cdot 10^5$ км/с ка тигез)?

965 Җирнең массасы $5,98 \cdot 10^{24}$ кг, ә Марсның массасы $6,4 \cdot 10^{23}$ кг. Кайсы зуррак: Җирнең массасымы әллә Марсның массасымы? Ничә тапкыр зуррак?

966 Юпитерның массасы $1,90 \cdot 10^{27}$ кг, ә Венераның массасы $4,87 \cdot 10^{24}$ кг. Кайсы кечерәк: Юпитерның массасымы әллә Венера массасымы, ничә тапкыр кечерәк?

967 Тимернең тыгызлыгы $7,8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Буе 1,2 м, иңе $6 \cdot 10^{-1}$ м һәм калынлыгы $2,5 \cdot 10^{-1}$ м булган тимер плитаның массасын табыгыз.

Кабатлау өчен күнегүләр

968 Поездны 15 мин туктатып торалар. Станциягә вакытында килеп җитү өчен, калган 120 км юлны ул расписаниедә каралган тизлектән 1,2 тапкыр зуррак тизлек белән үтә. Поезд әлеге 120 км араны нинди тизлек белән үткән?

969 Әгәр дә

а) $x = 5{,}5$, $y = 0{,}84$;

б) $x = -0{,}6$, $y = -3{,}2$ булса,

$1{,}5x^{-3}y^2 \cdot 6{,}2x^4y^{-1}$ аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

970 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\left(\frac{8a^{-2}}{b^{-3}}\right)^3 \cdot \left(\frac{b^{-2}}{16a^{-3}}\right)^2$; б) $\left(-\frac{9x^4}{2y^3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{4y^4}{27x^5}\right)^{-2}$.

971 Тигезсезлекне чишегез:

а) $\frac{2}{3}\left(3x - \frac{1}{2}\right) + x > 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - 10x\right)$;

б) $2(3y - 1) - \frac{1}{2}(4y + 1) \le \frac{2}{3}(y - 3) + \frac{1}{3}$.

972 x ның нинди кыйммәтләре өчен $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$ аңлатмасының мәгънәсе бар?

Контроль сораулар

1. Тискәре бөтен күрсәткечле дәрәҗәнең билгеләмәсен әйтегез.
2. Бердәй нигезле, бөтен күрсәткечле дәрәҗәләрнең тапкырчыгышы һәм өлеше билгеләмәсен әйтегез.
3. Дәрәҗәне дәрәҗәгә ничек күтәрергә?
4. Тапкырчыгышны һәм өлешне дәрәҗәгә ничек күтәрергә?
5. Санның нинди язмасын аның стандарт рәвеше дип атыйлар?
6. Санны стандарт рәвештә ничек күрсәтеп була, мисал китерегез.

§ 14. Якынча исәпләүләр

36. Якынча кыйммәтләрнең язылышы

Гадәттә якынча кыйммәтләрне якынлашу төгәллеге турында фикер йөртергә мөмкин булырлык итеп язалар. Саннарның якынча кыйммәтләре язмасының кайбер ысулларын тикшерик.

Мәсәлән, обой төргәгенә аның озынлыгы $18 \pm 0{,}3$ м га тигез дип языла. Бу язмадан күренгәнчә, төргәкнең озынлыгы 0,3 м га кадәр төгәллек белән 18 м га тигез, ягъни l озынлыгының

төгәл кыйммәте ($м$ ларда) 18 гә тигез якынча кыйммәттән 0,3 тән артыкка аерылмаска тиеш.

$$18 - 0{,}3 \le l \le 18 + 0{,}3,$$
$$17{,}7 \le l \le 18{,}3.$$

Математик таблицаларда һәм белешмәләрдә якынча кыйммәтләрне язганда аны соңгы разрядның бер берәмлегеннән артмаслык итеп язалар. Мондый очракларда сан *дөрес цифрлар* белән язылган дип әйтәләр.

Абсолют хатасы берәмлектән артмаган теләсә нинди разрядның цифрын якынча кыйммәтнең дөрес цифры дип атыйлар.

Мәсәлән, матдәләр тыгызлыгы таблицасында кислород тыгызлыгының якынча кыйммәте ρ (кг/м^3 да) 1,429 га тигез дип бирелгән. 1,429 язмасында барлык цифрлар да дөрес. Соңгы цифр меңнәр разрядында язылган. Димәк, абсолют хата 0,001 дән кечкенә яки аңа тигез була, ягъни

$$\rho = 1{,}429 \pm 0{,}001.$$

Техник әдәбиятта һәм төрле белешмәләрдә якынча кыйммәтләр язылышын стандарт рәвештә, ягъни $a \cdot 10^n$ рәвешендә, биредә $1 \le a < 10$ һәм n — бөтен сан, очратырга мөмкин. Бу очракта a тапкырлаучысы язылышында, гадәттә, бары тик дөрес цифрлар гына була. Мондый язылыш буенча якынлашу кыйммәтенең абсолют хатасын җиңел бәяләргә мөмкин.

Мисал Белешмәдә Айның массасы $7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг га тигез дип күрсәтелгән. Ай массасының якынча кыйммәтенең абсолют хатасын бәялик.

▶ Ай массасын (кг нарда) x хәрефе белән тамгалыйк. 7,35 тапкырлаучысында барлык цифрлар да дөрес һәм соңгысы йөзенче разряд цифры булганлыктан,

$$x = (7{,}35 \pm 0{,}01) \cdot 10^{22} \text{ була.}$$

Җәяләрне ачканнан соң,

$$x = 7{,}35 \cdot 10^{22} \pm 0{,}01 \cdot 10^{22},$$
$$x = 7{,}35 \cdot 10^{22} \pm 10^{20}.$$

Соңгы язылыш x ның якынча кыйммәтенең абсолют хатасы 10^{20} нән кимрәк яки аңа тигез дигәнне аңлата. ◁

Әгәр сан $a \cdot 10^n$ стандарт рәвешендә язылып, a тапкырлаучысында барлык цифрлар да дөрес

булса, мондый язма шулай ук чагыштырма хатаны да җиңел бәяләргә мөмкинлек бирә.

Мисалга кайтыйк. $x = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ якынча кыйммәтенең чагыштырма хатасын бәялик.

Без тикшерелә торган якынлашуның абсолют хатасы 10^{20} нән кимрәк яки аңа тигез икәнен күрсәттек. Димәк, аның чагыштырма хатасы

$$\frac{10^{20}}{7{,}35 \cdot 10^{22}} = \frac{1}{735} < \frac{1}{100}$$

дән артмый.

7,35 тапкырлаучысы язылышында чагыштырма хата соңгы разряд берәмлегеннән кимрәк икәнен күрәбез.

Гомумән,

әгәр $x \approx a \cdot 10^n$ (биредә $1 \le a \le 10$) һәм a тапкырлаучысы дөрес цифрлар белән язылган булса, ул вакытта якынча кыйммәтнең чагыштырма хатасы әлеге цифрлардан иң соңгысы язылган разряд берәмлегеннән артык булмавын күрсәтә алабыз.

Якынча кыйммәтләр язылышында $a \cdot 10^3$, $a \cdot 10^6$, $a \cdot 10^9$ урынына еш кына тиңдәшле рәвештә a меӊ, a млн., a млрд. дип язалар. Мондый язылышларда a тапкырлаучысы 1 дән 10 га кадәр булган ара чикләреннән чыгарга мөмкин. Мәсәлән, Җирдән Кояшка кадәр ераклык якынча 149,6 млн. км га тигез.

Күнегүләр

973 Язылышның мәгънәсен аңлатыгыз:

а) $m = 4{,}96 \pm 0{,}08$; в) $y = 6482 \pm 35$;

б) $x = 0{,}379 \pm 0{,}021$; г) $n = 89\,000 \pm 3000$.

974 а) $y = 73 \pm 1$; в) $y = 6{,}5 \pm 0{,}1$;

б) $y = 3{,}9 \pm 0{,}2$; г) $y = 20{,}48 \pm 0{,}15$

булса, y саны нинди чикләр арасында урнашкан?

975 Яктылыкның бушлыктагы тизлеге (м/с да) $299\,792\,458 \pm 1{,}2$ гә тигез. c саны нинди чикләр арасында урнашкан?

976 Барлык цифрлары да дөрес булган якынча кыйммәтнең абсолют хатасын бәяләгез:

а) 47,62; в) 4,3725; д) 62; ж) 8,4;

б) 13,5; г) 0,00681; е) 250; з) 8,400.

977 x ның дөрес цифрлар белән язылган якынча кыйммәтенең төгәллеген күрсәтегез:

а) $x \approx 3{,}34$; в) $x \approx 0{,}073$; д) $x \approx 0{,}02$;

б) $x \approx 162{,}3$; г) $x \approx 1680$; е) $x \approx 0{,}020$.

978 Әгәр дә a тапкырлаучысында барлык цифрлары дөрес булса, $a \cdot 10^n$ рәвешендә язылган x ның якынча кыйммәтенең абсолют хатасын бәяләгез:

а) $x \approx 4{,}8 \cdot 10^4$; б) $x \approx 2{,}164 \cdot 10^6$.

979 Әгәр a тапкырлаучысында барлык цифрлар дөрес булса, $a \cdot 10^n$ рәвешендә язылган y ның якынча кыйммәтенең чагыштырма хатасын бәяләгез:

а) $y \approx 1{,}27 \cdot 10^3$; г) $y \approx 2{,}3162 \cdot 10^{-4}$;
б) $y \approx 1{,}27 \cdot 10^{-8}$; д) $y \approx 0{,}006 \cdot 10^{-2}$;
в) $y \approx 1{,}490 \cdot 10^5$; е) $y \approx 7{,}5 \cdot 10^0$.

980 Әгәр дә ρ (г/см^3 ларда)

а) $\rho \approx 2{,}6 \cdot 10^2$; в) $\rho \approx 5{,}20 \cdot 10^3$; д) $\rho \approx 1{,}7 \cdot 10^{-2}$;
б) $\rho \approx 9{,}12 \cdot 10$; г) $\rho \approx 6{,}0 \cdot 10^2$; е) $\rho \approx 5 \cdot 10^{-3}$ нә

тигез булса, тыгызлык ρ ның белешмәләр китабыннан алынган якынча кыйммәтенең чагыштырма хатасын бәяләгез.

981 Белешмәләр китабында күрсәтелгәнчә, Кояшның массасы һәм Җирнең массасы (кг нарда) тиңдәшле рәвештә $1{,}990 \cdot 10^{30}$ һәм $5{,}976 \cdot 10^{24}$ нә тигез. Әлеге якынча кыйммәтләрнең абсолют хатасын бәяләгез.

982 Электронның массасы $0{,}91 \cdot 10^{-27}$ кг га тигез. 0,91 санында барлык цифрлар да дөрес. $0{,}91 \cdot 10^{-27}$ якынча кыйммәтенең чагыштырма төгәллеген күрсәтегез.

Кабатлау өчен күнегүләр

983 Санны стандарт рәвештә күрсәтегез:

а) 376 000; в) 0,000085;
б) 12 000 000; г) 0,00169.

984 Гамәлне башкарыгыз:

а) $(3{,}14 \cdot 10^3) \cdot (2{,}1 \cdot 10^5)$; б) $(1{,}96 \cdot 10^{-2}) : (2{,}45 \cdot 10^{-3})$.

985 Системаны чишегез:

$$\begin{cases} 0{,}2(4 - 5x) + 0{,}5x < 2x - 0{,}5(4 - 3x), \\ 1{,}5(3 - 2x) + 0{,}5 > 12 - 0{,}1(10 - 5x). \end{cases}$$

986 $\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{6}) - (\sqrt{2} + 1)^2$ аңлатмасын гадиләштерегез.

987 a ның теләсә нинди кыйммәте өчен $a^2 > 14a - 50$ тигезсезлегенең дөрес икәнен исбатлагыз.

37. Якынча кыйммәтләр белән гамәлләр

Якынча бирелгәннәрне исәпләү эшләре практик мәсьәләләрдә даими файдаланыла, бу очракта исәпләп чыгарылган нәтиҗәләрне гадәттә түгәрәклиләр. Язылышында барлык цифрлары да дөрес булган якынча кыйммәтләрне кушканда, алганда, тапкырлаганда һәм бүлгәндә бу түгәрәкләүләрнең ничек башкарылуын тикшерик.

Мисалдан башлыйк. Әгәр дә

$0{,}01$ гә кадәр төгәллек белән $x \approx 7{,}63$,

$0{,}1$ гә кадәр төгәллек белән $y \approx 9{,}2$

булуы билгеле булса, $x + y$ суммасының якынча кыйммәтен табыйк.

7,63 һәм 9,2 якынча кыйммәтләрен кушабыз:

$$7{,}63 + 9{,}2 = 16{,}83.$$

16,83 якынча кыйммәтенең төгәллеген билгелибез:

$$7{,}63 - 0{,}01 \le x \le 7{,}63 + 0{,}01,$$
$$9{,}2 - 0{,}1 \le y \le 9{,}2 + 0{,}1,$$
$$16{,}83 - 0{,}11 \le x + y \le 16{,}83 + 0{,}11.$$

Шуның өчен 0,11 гә кадәр төгәллек белән $x + y \approx$ $\approx 16{,}83$.

Күргәнебезчә, абсолют хата унынчы өлеш разрядының бер берәмлегеннән аз гына зуррак була. Шул сәбәпле 16,83 кыйммәтендә унынчы өлеш цифрын саклау яхшырак. Абсолют хата йөздән 11 гә кадәр була ала, шуңа күрә йөзенче өлеш цифрын исәпкә алмасак та ярый. Димәк, нәтиҗәне унынчы өлешләргә кадәр (төгәллеге азрак булган 9,2 бирелгәненә тиңдәш) түгәрәкләү максатка ярашлы. Ул вакытта

$$x + y \approx 16{,}8.$$

Сумманың якынча кыйммәтен тапканда, без якынча кыйммәтләрне куштык һәм табылган нәтиҗәне төгәллеге азрак булган кушылучы буенча түгәрәкләдек. Кушу һәм алуның барлык очракларында да шулай эшлиләр: якынча кыйммәтләрнең суммасын яки аермасын табалар һәм нәтиҗәне төгәллеге кимрәк булган бирелгән буенча (абсолют төгәллек күздә тотыла) түгәрәклиләр, ягъни төгәллеге кимрәк булган бирелгәндә ничә урын булса, нәтиҗәдә өтердән соң шулкадәр урын калдыралар.

1 нче мисал $x \approx 17{,}2$ һәм $y \approx 8{,}407$ булсын. x һәм y суммасының якынча кыйммәтен табыйк:

АЛЕКСЕЙ НИКОЛАЕВИЧ КРЫЛОВ
(1863—1945)

— рус корабль төзүчесе, математик һәм механик, академик. Корабль теориясе буенча күп кенә төп хезмәтләрнең авторы, беренче рус линкорларын проектлаштырганда һәм төзүдә катнашучы. Якынча исәпләүләр теориясенә җитди өлеш кертKән.

$$x + y \approx 25{,}607.$$

17,2 һәм 8,407 бирелгән якынча кыйммәтләрдән беренчесенең төгәллеге кимрәк. Нәтиҗәне беренче бирелгән буенча, ягъни унынчы өлешләргә кадәр түгәрәкләп табабыз:

$$x + y \approx 25{,}6. \;\triangleleft$$

2 нче мисал $x \approx 6{,}784$ һәм $y \approx 4{,}91$ булсын. x һәм y аермасының якынча кыйммәтен табыйк:

$$x - y \approx 1{,}874.$$

6,784 һәм 4,91 бирелгән якынча кыйммәтләрдән икенчесенең төгәллеге кимрәк. Нәтиҗәне икенче бирелгән буенча, ягъни йөзенче өлешләргә кадәр түгәрәкләп табабыз:

$$x - y \approx 1{,}87. \;\triangleleft$$

Якынча кыйммәтләрне тапкырлаганда һәм бүлгәндә берникадәр башкачарак эшлиләр. Биредә түгәрәкләү бирелгәннәрнең чагыштырма төгәллекләрен исәпкә алып башкарыла. Бу очракта якынча кыйммәтләрнең тапкырчыгышын яки өлешен табып, нәтиҗәне төгәллеге кимрәк булган бирелгән буенча (чагыштырма төгәллек күздә тотыла) түгәрәклиләр. Моның өчен башта бирелгәннәрне һәм табылган нәтиҗәне $a \cdot 10^n$ стандарт рәвештә язалар, һәм нәтиҗәдәге a тапкырлаучысын төгәллеге кимрәк булган бирелгәндәге тиңдәш тапкырлаучыда өтердән соң ничә урын булса, шулкадәр урын калдырып түгәрәклиләр.

3 нче мисал $x \approx 0{,}86$ һәм $y \approx 27{,}1$ булсын. x һәм y тапкырчыгышының якынча кыйммәтен табыйк.

0,86 һәм 27,1 не үзара тапкырлап, $xy \approx 23{,}306$ ны табабыз.

Бирелгән саннарны һәм нәтиҗәне стандарт рәвештә язабыз:

$$0{,}86 = 8{,}6 \cdot 10^{-1},\; 27{,}1 = 2{,}71 \cdot 10^{1},$$
$$23{,}306 = 2{,}3306 \cdot 10^{1}.$$

8,6 тапкырлаучысында өтердән соң бер цифр, ә 2,71 тапкырлаучысында өтердән соң ике цифр. 2,3306 санын беренче бирелгән буенча, ягъни унынчы өлешкә кадәр түгәрәкләп табабыз:

$$xy \approx 2{,}3 \cdot 10^{1} = 23. \;\triangleleft$$

4 нче мисал $x \approx 563{,}2$ һәм $y \approx 32$ булсын. x һәм y өлешенең якынча кыйммәтен табыйк.

563,2 не 32 гә бүлеп табабыз:

$$x : y \approx 17{,}6.$$

Бирелгән саннарны һәм нәтиҗәне стандарт рәвештә язабыз:

$$563{,}2 = 5{,}632 \cdot 10^2,\ 32 = 3{,}2 \cdot 10,$$
$$17{,}6 = 1{,}76 \cdot 10.$$

Әлеге язылыштан күренгәнчә, 1,76 санын икенче бирелгән буенча, ягъни унынчы өлешләргә кадәр түгәрәкләргә кирәк. Табабыз:

$$x : y \approx 1{,}8 \cdot 10 = 18.\ \triangleleft$$

Шулай итеп, якынча кыйммәтләрне кушканда, алганда, тапкырлаганда һәм бүлгәндә нәтиҗәне төгәллеге кимрәк булган бирелгән буенча түгәрәклиләр. Бу вакытта кушканда һәм алганда бирелгән саннарны унарлы вакланмалар рәвешендә язалар һәм төгәллеге кимрәк булган саннар абсолют төгәллек буенча билгеләнә, ә инде тапкырлаганда һәм бүлгәндә бирелгән саннарны стандарт рәвештә язалар һәм төгәллеге кимрәк булган бирелгәнне чагыштырма төгәллек буенча билгелиләр.

Саннарның якынча кыйммәтләре өстендә берничә гамәл башкару сорала торган мисалны тикшерик.

[illegible]че мисал $x \approx 3{,}75$, $y \approx 48{,}8$ һәм $z \approx 0{,}0095$ булганда, $(x + y)z$ аңлатмасының якынча кыйммәтен табыйк.

▶ Табабыз:

$$3{,}75 + 48{,}8 = 52{,}55 \approx 52{,}6; \quad 52{,}6 \cdot 0{,}0095 =$$
$$= 0{,}4997 = 4{,}997 \cdot 10^{-1} \approx 5{,}0 \cdot 10^{-1} = 0{,}50.$$

Тапкырлау нәтиҗәсен түгәрәкләгәндә $52{,}6 = 5{,}26 \cdot 10$; $0{,}0095 = 9{,}5 \cdot 10^{-3}$ булуы исәпкә алынган иде. Шуңа күрә 4,997 тапкырлаучысы унынчы өлешләргә кадәр түгәрәкләнде. $\triangleleft$

Күнегүләр

988 Әгәр

а) $x \approx 0{,}9071$, $y \approx 6{,}52$; в) $x \approx 2{,}134$, $y \approx 11{,}27$;
б) $x \approx 7{,}8$, $y \approx 4{,}725$; г) $x \approx 19$, $y \approx 31{,}8$

булса, x һәм y суммасының якынча кыйммәтен табыгыз.

989 Әгәр

а) $a \approx 5{,}64$, $b \approx 2{,}3415$; в) $a \approx 23{,}40$, $b \approx 1{,}9165$;
б) $a \approx 42{,}609$, $b \approx 38{,}6$; г) $a \approx 6{,}385$, $b \approx 0{,}29$

булса, a һәм b аермасының якынча кыйммәтен табыгыз.

990 Әгәр

а) $x \approx 34{,}12$ һәм $y \approx 19{,}6$; б) $x \approx 4{,}1608$ һәм $y \approx 1{,}09$

булса, $x + y$ һәм $x - y$ ның якынча кыйммәтләрен табыгыз.

991 $a \approx 26{,}1042$, $b \approx 8{,}98$ һәм $c \approx 3{,}65$ икәне билгеле. $a - b + c$ аңлатмасының якынча кыйммәтен табыгыз.

992 Әгәр $x \approx 9{,}1$, $y \approx 8{,}89$ һәм $z \approx 0{,}8517$ булса, $x + y - z$ аңлатмасының якынча кыйммәтен табыгыз.

993 Май тутырылган шешәнең массасы 1,63 кг, буш шешәнең массасы 0,706 кг. Шешәдә күпме май булган?

994 Яклары якынча 3,26; 6,12; 7,50 һәм 4,325 м булган дүртпочмакның периметрын табыгыз.

995 Электр чылбыры каршылыклары $R_1 = 5{,}26$ Ом, $R_2 \approx 3{,}815$ Ом һәм $R_3 \approx 4{,}70$ Ом булган бер-бер артлы тоташтырылган өч үткәргечтән тора. Барлык чылбырның каршылыгы R ны $R = R_1 + R_2 + R_3$ формуласы буенча исәпләгез.

996 600 м^2 мәйданлы җир участогының 56,5 м^2 ына йорт, 16,3 м^2 ына сарай төзелгән. Төзелештән калган буш участокның мәйданын табыгыз.

997 Җирнең массасы $5{,}976 \cdot 10^{21}$ т, ә Венераның массасы $4{,}88 \cdot 10^{21}$ т. Җирнең массасы Венера массасыннан ничә тоннага артыграк?

998 Әгәр
а) $a = 2{,}2 \cdot 10^3$ һәм $b \approx 3{,}41 \cdot 10^4$;
б) $a \approx 1{,}154 \cdot 10^8$ һәм $b \approx 6{,}9 \cdot 10^{-5}$;
в) $a \approx 8{,}42 \cdot 10^{-4}$ һәм $b \approx 9{,}81 \cdot 10^5$;
г) $a \approx 7{,}605 \cdot 10^{-2}$ һәм $b \approx 1{,}8 \cdot 10^{-3}$
булса, a һәм b тапкырчыгышының якынча кыйммәтен табыгыз.

999 Әгәр
а) $x \approx 8{,}75 \cdot 10^6$ һәм $y \approx 5{,}4 \cdot 10^4$;
б) $x \approx 4{,}3 \cdot 10^5$ һәм $y \approx 6{,}95 \cdot 10^2$
булса, x һәм y өлешенең якынча кыйммәтен табыгыз.

1000 Әгәр $a \approx 8{,}3 \cdot 10^4$ һәм $b = 3{,}12 \cdot 10^6$ булса, ab һәм $\frac{a}{b}$ аңлатмаларының якынча кыйммәтләрен исәпләп чыгарыгыз.

1001 Әгәр а) $p \approx 46{,}5$ һәм $q \approx 0{,}72$; б) $p \approx 0{,}0638$ һәм $q \approx 18{,}4$ булса, p һәм q тапкырчыгышының якынча кыйммәтен исәпләп чыгарыгыз.

1002 Әгәр а) $x \approx 18{,}28$ һәм $y \approx 0{,}54$; б) $x \approx 0{,}36$ һәм $y \approx 0{,}0238$ булса, x һәм y өлешенең якынча кыйммәтен табыгыз.

1003 Әгәр а) $x \approx 2{,}05$ һәм $y \approx 1{,}2$; б) $x \approx 0{,}6$ һәм $y \approx 7{,}5$ булса, xy һәм $\frac{x}{y}$ аңлатмаларының якынча кыйммәтләрен исәпләп чыгарыгыз.

1004 Буе 5,85 м, иңе 3,75 м булган бүлмәнең мәйданын табыгыз.

1005 Турыпочмаклы участокның буе 254 м, иңе 194 м. Участокның мәйданы күпме?

1006 Күзәтүче, яшен яшьнәгәннән соң 4,7 с узгач, күк күкрәвен ишетә. Яшен күзәтүчедән нинди ераклыкта яшьнәгән (һавада яшен тизлеге якынча 332 м/с)?

1007 Әгәр а) $c \approx 6{,}29$ м; б) $c \approx 0{,}85$ м
булса, ягы c булган квадратның периметрын табыгыз.

1008 Турыпочмаклы мәйданчыкның мәйданы 150 м^2 га, аның буе 16,3 м га тигез. Мәйданчыкның иңен табыгыз.

1009 Бакыр пластинканың массасы 325 г. Бакырның тыгызлыгы 8,9 г/см^3. Пластинканың күләмен табыгыз.

1010 Әгәр $a \approx 15{,}4$ см һәм $b \approx 8{,}7$ см булса, яклары a һәм b булган турыпочмаклыкның периметрын һәм мәйданын табыгыз.

1011 Әгәр
а) $x \approx 46{,}24$ һәм $y \approx 25{,}2$ булса, $xy - 5y$;
б) $x \approx 10{,}20$ һәм $y \approx 2{,}08$ булса, $\frac{x+y}{x-y}$
аңлатмасының якынча кыйммәтен исәпләп чыгарыгыз.

1012 Әгәр $x \approx 3{,}7$ булса, $x^2 - 2x$ аңлатмасының якынча кыйммәтен табыгыз.

1013 Әгәр r радиусы:
а) $r \approx 8{,}3$ см; б) $r \approx 25{,}1$ м
булса, түгәрәкнең мәйданы күпме булыр?

1014 Турыпочмаклы участокның үлчәме: 112×348 м. Бер гектардан 18 т бәрәңге алу планлаштырыла. Әлеге участоктан күпме бәрәңге алу күздә тотылган?

Кабатлау өчен күнегүләр

1015 Аңлатманың кыйммәтен табыгыз!
а) $x = -3{,}1$ булганда, $(x^2 - 9)\left(\frac{2x}{x-3} - 1\right)$ нең;
б) $a = -10{,}1$ $b = 12{,}2$ булганда, $\frac{7b-7a}{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{b+a}\right)$ ның.

1016 $(\sqrt{35} - 6)(\sqrt{35} + 6) - (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$ аңлатмасының кыйммәтен нуль белән чагыштырыгыз.

1017 $3\sqrt{2} + \sqrt{20}$ һәм $2\sqrt{7} + 2\sqrt{5}$ аңлатмаларының кыйммәтләрен чагыштырыгыз.

1018 Моторлы көймә, елга агымы буенча 44 км һәм агымга каршы 36 км үтеп, барлык юлда 4 сәг вакыт булды. Әгәр елга агымының тизлеге 2 км/сәг булса, көймәнең үз тизлеген табыгыз.

38. Якынча бирелгәннәрне калькуляторда исәпләү

Калькуляторда якынча бирелгәннәр белән гамәлләр төгәл бирелгәннәрдәге кебек башкарыла. Бу вакытта табылган нәтиҗәләрне безгә билгеле булган кагыйдә буенча түгәрәклиләр.

1 нче мисал Әгәр $x \approx 613{,}97$ һәм $y \approx 89{,}716$ булса, $x + y$ суммасын табыйк.

▶ Кушуны башкарып, 703, 686 ны табабыз. Әлеге нәтиҗәне беренче кушылучы буенча түгәрәкләп табабыз:

$$613{,}97 + 89{,}716 \approx 703{,}69. \triangleleft$$

2 нче мисал Әгәр $x \approx 4{,}742 \cdot 10^{-3}$ һәм $y \approx 1{,}8 \cdot 10^{6}$ икәне билгеле булса, xy тапкырчыгышын табыйк.

▶ Моның өчен 4,742 һәм 1,8 саннарының тапкырчыгышын исәплибез һәм нәтиҗәне $10^{-3} \cdot 10^{6}$ тапкырчыгышын, ягъни 10^{3} нә тапкырлыйбыз. Ул вакытта

$$4{,}742 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}8 \cdot 10^{6} = 8{,}5356 \cdot 10^{3} \approx 8{,}5 \cdot 10^{6}. \ \triangleleft$$

3 нче мисал Радиусы $r \approx 1{,}7$ см булган корыч шарның массасы m ны табыйк (корычның тыгызлыгы $\rho = 7{,}8$ г/см^3).

▶ Шарның күләме (V) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ формуласы буенча исәпләп чыгарыла. $m = \rho V$ булганлыктан, $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ була.

$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ аңлатмасында беренче гамәл итеп дәрәҗәгә күтәрүне башкару җайлырак. Шуның өчен формуланы

$$m = \frac{r^3 \cdot 4\pi\rho}{3}$$

рәвешендә язабыз.

Бу аңлатмада бары тик тапкырлау һәм бүлү бар. Барлык якынча саннар арасында r һәм ρ ның төгәллекләре кимрәк, чөнки $1{,}7 = 1{,}7 \cdot 10^0$ һәм $7{,}8 = 7{,}8 \cdot 10^0$. π нең якынча кыйммәте итеп 3,14 не алабыз.

Исәпләүләрне башкарып табабыз:

$$160{,}\ 43892.$$

Табылган нәтиҗәдәге беренче тапкырлаучыны унынчы өлешләргә кадәр түгәрәкләп, стандарт рәвештә язабыз.

Җавап: $m \approx 1{,}6 \cdot 10^2$ г. ◁

Массаны исәпләгәндә бирелгән саннарның калькуляторга стандарт рәвештә кертелмәүләрен әйтеп китик. Нәтиҗәне дөрес түгәрәкләү өчен, r һәм ρ ның кыйммәтләрен стандарт рәвештә яздык.

Күнегүләр

1019 Якынча кыйммәтләр белән гамәлләр башкарыгыз:

а) $765{,}138 + 99{,}8$;
б) $981{,}5 + 49{,}6143$;
в) $1925{,}34 - 7{,}6893$;
г) $2008{,}163 - 89{,}4$;
д) $0{,}67631 + 1{,}498$;
е) $6{,}327 - 6{,}01045$.

1020 Әгәр

а) $x \approx 16{,}396$ һәм $y \approx 7{,}25$;
б) $x \approx 607{,}4$ һәм $y \approx 48{,}566$;
в) $x \approx 0{,}19405$ һәм $y \approx 0{,}16$;
г) $x \approx 1{,}315$ һәм y 1,1162

булса, $x + y$ һәм $x - y$ аңлатмаларының кыйммәтләрен табыгыз.

1021 Якынча кыйммәтләр белән гамәлләр башкарыгыз:

а) $4{,}37 \cdot 10^5 \cdot 2{,}1116 \cdot 10^{-2}$; г) $6{,}314 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}21561 \cdot 10^8$;

б) $6{,}3892 \cdot 10^4 : (5{,}87 \cdot 10^2)$; д) $5{,}64 \cdot 10^{11} : (6{,}54 \cdot 10^{-2})$;

в) $1{,}90 \cdot 10^{-2} : (1{,}8 \cdot 10^{-6})$; е) $1{,}8098 \cdot 10^{-5} : (1{,}99 \cdot 10^{-5})$.

1022 Әгәр

а) $x \approx 3{,}12 \cdot 10^4$, $y \approx 1{,}9068 \cdot 10^{-1}$;

б) $x \approx 6{,}8 \cdot 10^{10}$, $y \approx 2{,}308 \cdot 10^{11}$;

в) $x \approx 9{,}909 \cdot 10^3$, $y \approx 8{,}6 \cdot 10^2$;

г) $x = 4{,}75 \cdot 10^{-3}$, $y \approx 8{,}3614 \cdot 10^2$

булса, xy һәм $x : y$ аңлатмаларының кыйммәтләрен табыгыз.

1023 $x \approx 5{,}1 \cdot 10^{-2}$, $y \approx 3{,}68 \cdot 10^{-2}$, $z \approx 7{,}121 \cdot 10^4$ икәне билгеле.

а) $(x - y)z$; б) $(x + y) : z$

аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

1024 Беренче космик тизлек $v_1 \approx 7{,}9$ км/с. Икенче космик тизлек v_2 беренчесеннән $\sqrt{2}$ тапкыр зуррак. Икенче космик тизлекне табыгыз.

1025 Үлчәмнәре $5{,}5 \times 4{,}3$ м һәм $5{,}2 \times 4{,}6$ м булган ике бүлмәнең идәннәрен буяр өчен ничә килограмм буяу кирәк булыр?

1026 Җирнең атмосферасы нигездә азот һәм кислород катнашмасыннан тора. Атмосфераның гомуми массасы $5{,}16 \cdot 10^{15}$ т. Атмосфера массасының 20,95 % ын кислород, ә 78,09 % ын азот тәшкил итә. Җир атмосферасында күпме кислород һәм күпме азот бар?

1027 Әгәр 2,00 г водородта $6{,}02 \cdot 10^{23}$ молекула булса (водородның бер молекуласы ике атомнан тора), водород атомының массасы нинди?

1028 Меркурийның массасы $3{,}3 \cdot 10^{23}$ кг, ә Юпитерның $1{,}90 \cdot 10^{27}$ кг. Юпитерның массасы Меркурий массасыннан ничә тапкыр зуррак?

1029 Бакта 1,36 м^3 су бар. Җылытканда аның тыгызлыгы 0,998 т/м^3 дан 0,965 т/м^3 га кадәр кимеде. Суның күләме күпмегә артты?

1030 Автомобиль 60 км/сәг тизлек белән хәрәкәт иткән. Автомобильнең кинетик энергиясе 2 тапкыр артсын өчен, аның тизлеген ничә тапкыр арттырырга кирәк? (v тизлеге белән хәрәкәт итүче m массалы җисемнең кинетик энергиясе (E) $E = \frac{mv^2}{2}$ формуласы буенча исәпләп чыгарыла.)

1031 Җир өслегенең һәр квадрат сантиметрына массасы 1,033 кг булган һава баганасы басым ясый. Җир атмосферасының массасы күпме? (Җир өслегенең мәйданын $S = 4\pi R^2$ формуласы буенча табыгыз, Җирнең уртача радиусы $R \approx 6371{,}032$ км.)

Кабатлау өчен күнегүләр

1032 Якынча кыйммәтнең абсолют һәм чагыштырма хатасын бәяләгез:

а) $6{,}125 \cdot 10^2$; б) $1{,}50 \cdot 10^{-1}$; в) $4{,}6 \cdot 10^{-4}$.

1033 x ка нинди кыйммәтләр биргәндә, $y = -0{,}2x + 4$ функциясе нульгә әйләнә; уңай кыйммәтләр ала; тискәре кыйммәтләр ала?

1034 Тигезсезлекләр системасын чишегез:

$$\begin{cases} \frac{2x+1}{5} - \frac{x}{3} \geq \frac{x}{5} + \frac{1-x}{15}, \\ \frac{2x}{3} - \frac{x+5}{6} < \frac{3x}{2} - \frac{x-5}{12}. \end{cases}$$

1035 Тигезсезлекләрнең кайсы дөрес:

а) $\sqrt{40-12\sqrt{2}} = 6-\sqrt{2}$ әллә $\sqrt{40-12\sqrt{2}} = \sqrt{2}-6$;

б) $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{2}-\sqrt{3}$ әллә $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$?

Контроль сораулар

1 $x = a \pm h$ язылышы нәрсәне аңлата?

2 Якынча кыйммәтләрне кушканда һәм алганда нәтиҗәләрне ничек түгәрәклиләр?

3 Якынча кыйммәтләрне тапкырлаганда һәм бүлгәндә нәтиҗәләрне ничек түгәрәклиләр?

V бүлеккә өстәмә күнегүләр

13 нче параграфка

1036 а) $x = 0{,}1$ булганда, $10x^{-3}$;
б) $x = 200$, $y = 5$ булганда, xy^{-4}
аңлатмасының кыйммәтен табыгыз.

1037 Түбәндәге аңлатмаларның үзара кире икәнен исбатлагыз:

а) $\left(\frac{3}{5}\right)^4$ һәм $0{,}6^{-4}$; в) 1000^{-2} һәм $0{,}001^{-2}$;

б) $1{,}25^3$ һәм $0{,}8^3$; г) $2{,}5^{-4}$ һәм $\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$.

1038 Аңлатмаларны чагыштырыгыз:

а) 5^{-3} һәм 7^{-3}; в) $(-2)^0$ һәм $(-2)^{-2}$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ һәм $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$; г) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ һәм $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}$.

1039 Исәпләп чыгарыгыз:

а) $-0{,}25^{-2} \cdot 100$; г) $0{,}1^{-1} + 1{,}1^0$;

б) $0{,}01 \cdot (-0{,}5)^{-3}$; д) $3\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - 0{,}5$;

в) $0{,}2^{-4} \cdot (-1{,}6)$; е) $-4^{-1} \cdot 5 + 2{,}5^2$.

1040 Тискәре күрсәткечле дәрәҗәләре булмаслык итеп, аңлатмаларның рәвешен үзгәртегез:

а) $\frac{am^{-2}}{a^{-1}b}$; б) $\frac{(a+b)b}{b^{-1}(a-b)}$; в) $\frac{2a^{-1}b^2}{(a+b)^{-2}}$.

1041 Аңлатманы вакланма рәвешендә күрсәтегез:

а) $xy^{-2} - x^{-2}y$; в) $mn(n-m)^{-2} - n(m-n)^{-1}$;

б) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} + \left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$; г) $(x^{-1} + y^{-1})(x^{-1} - y^{-1})$.

1042 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^2}$; б) $\frac{ab^{-1}-a^{-1}b}{a^{-1}-b^{-1}}$.

1043 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $0{,}3a^{-2}b^3 \cdot 1{,}5\ a^2b^{-1}$; г) $(-0{,}2\ m^2n^3)^{-3} \cdot 0{,}1\ m^6n^9$;

б) $6^{-1}x^2y^{-1} \cdot 1{,}5xy^{-2}$; д) $a^{-2}b^5 \cdot (3ab)^{-1}$;

в) $1{,}2xy^{-2} \cdot 4x^{-1}y$; е) $6{,}1x^{-3}y \cdot (0{,}1xy^{-1})^{-1}$.

1044 Аңлатманы нигезе 10 булган дәрәҗә рәвешендә күрсәтегез:

а) 100^n; б) $0{,}1 \cdot 100^{n+3}$; в) $0{,}01^n \cdot 10^{2-2n}$.

1045 Аңлатманы гадиләштерегез (n — бөтен сан):

а) $\frac{25^n}{5^{2n-1}}$; б) $\frac{6^n}{2^{n-1} \cdot 3^{n+1}}$.

1046 $x^{-2} + x^{-1} + x$ аңлатмасын берсе

а) x; б) x^{-1}; в) x^{-2}

булган ике тапкырлаучының тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтегез.

1047 $a^{-6} + a^{-4}$ аңлатмасында

а) a^{-4}; б) a^{-6}

тапкырлаучысын җәя тышына чыгарыгыз.

1048 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) $\frac{x^5+x^{12}}{x^{-5}+x^{-12}}$; б) $\frac{a^5+a^6+a^7}{a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}}$.

1049 n теләсә нинди бөтен сан булганда,

а) $2^n + 2^n = 2^{n+1}$; б) $2 \cdot 3^n + 3^n = 3^{n+1}$

икәнен исбатлагыз.

1050 Вакланманы кыскартыгыз (n — бөтен сан):

а) $\frac{3^{n+1}-3^n}{2}$; б) $\frac{2^n+2^{-n}}{4^n+1}$.

1051 Үзгәрешленең кыйммәтләре теләсә нинди булганда да, аңлатманың бер үк кыйммәтләр кабул итүен исбатлагыз:

а) $\frac{2^m 3^{n-1}-2^{m-1} 3^n}{2^m \cdot 3^n}$; в) $\frac{5^m 4^n}{5^{m-2} \cdot 2^{2n}+5^m 2^{2n-1}}$;

б) $\frac{5^{n+1} \cdot 2^{n-2}+5^{n-2} \cdot 2^{n-1}}{10^{n-2}}$; г) $\frac{21^n}{3^{n-1} \cdot 7^{n+1}+3^n 7^n}$.

1052 Вакытны секундларда аңлатыгыз һәм табылган санны стандарт рәвештә күрсәтегез: а) 1 сәг; б) 1 тәүлек; в) 1 ел; г) 1 гасыр.

1053 Стандарт рәвештә язылган саннар белән гамәлләрне башкарыгыз:

а) $(3,4 \cdot 10^{15}) \cdot (7 \cdot 10^{-12})$; в) $(9,6 \cdot 10^{-12}) : (3,2 \cdot 10^{-15})$;
б) $(8,1 \cdot 10^{-23}) \cdot (2 \cdot 10^{21})$; г) $(4,42 \cdot 10^{11}) : (5,1 \cdot 10^{-7})$.

1054 Стандарт рәвештә язылган саннар белән гамәлләрне башкарыгыз:

а) $8,7 \cdot 10^4 + 5,6 \cdot 10^4$; в) $9,3 \cdot 10^{-3} - 8,4 \cdot 10^{-3}$;
б) $3,6 \cdot 10^3 + 4,71 \cdot 10^2$; г) $2,26 \cdot 10^5 - 1,3 \cdot 10^4$.

1055 x санының тәртибе 15 кә тигез. Түбәндәге саннарның тәртибен күрсәтегез:

а) $1000x$; б) $0,0001x$; в) $\frac{x}{10^{20}}$; г) $\frac{x}{10^{-10}}$.

1056 x санының тәртибе 7 гә тигез, ә y санының тәртибе 9 га тигез. xy тапкырчыгышының тәртибе нинди булырга мөмкин; $\frac{y}{x}$ өлешенең тәртибе нинди?

1057 Җирдән Центавр α сы йолдызына кадәр ераклык $2,07 \cdot 10^5$ астрономик берәмлеккә тигез (Җирдән Кояшка кадәр $1,495 \cdot 10^8$ км га тигез булган ераклык астрономик берәмлек дип атала). Бу ераклыкны километрларда күрсәтегез.

1058 1 ккал $4,2 \cdot 10^3$ Дж не тәшкил итә. 1 Дж дә ничә килокалория?

1059 Таблицада кабатлыны һәм өлешне күрсәтүче алкушымчаларның тамгаланышы һәм аларга тиңдәш тапкырлаучылар бирелгән:

Алкушымча	Кабатлылык	Тамгаланышы	Алкушымча	Кабатлылык	Тамгаланышы
мега	10^6	М	деци	10^{-1}	д
кило	10^3	к	санти	10^{-2}	с
гекто	10^2	г	милли	10^{-3}	м
дека	10^1	да	микро	10^{-6}	мк

Таблицадан файдаланып,
а) $2,5 \cdot 10^2$ Мт ны тонналарда;
б) $3,1 \cdot 10^{10}$ мг ны килограммнарда;

в) $1{,}5 \cdot 10^2$ гл ны литрларда;
г) $5 \cdot 10^6$ Н ны меганьютоннарда;
д) $7 \cdot 10^{-7}$ м ны микрометрларда;
е) $8{,}4 \cdot 10^{-4}$ ккал не калорияләрдә аңлатыгыз.

14 нче параграфка

1060 Дөрес цифрлар белән язылган якынча кыйммәтнең абсолют хатасын бәяләгез:
а) $x \approx 15{,}63$; б) $x \approx 0{,}3861$; в) $x \approx 176{,}1$; г) $x \approx 4{,}00116$.

1061 Әгәр a тапкырлаучысында барлык цифрлар дөрес булса, $a \cdot 10^n$ рәвешендә язылган x ның якынча кыйммәтенең чагыштырма хатасын бәяләгез:
а) $x \approx 6{,}24 \cdot 10^5$;
б) $x \approx 1{,}127 \cdot 10^{-5}$;
в) $x \approx 9{,}111 \cdot 10^{11}$;
г) $x \approx 3{,}6 \cdot 10^{-2}$.

1062 Белешмәдә Венера массасының $4{,}88 \cdot 10^{21}$ т га тигез икәне күрсәтелгән. Әлеге якынча кыйммәтнең абсолют һәм чагыштырма хаталарын бәяләгез.

1063 Әгәр
а) $a \approx 51{,}642$ һәм $b \approx 12{,}68$;
б) $a \approx 60{,}1$ һәм $b \approx 25{,}394$;
в) $a \approx 6{,}33$ һәм $b \approx 0{,}295$;
г) $a \approx 8{,}006$ һәм $b \approx 0{,}21$
булса, $a + b$ һәм $a - b$ ның якынча кыйммәтләрен табыгыз.

1064 Әгәр $a \approx 6{,}184$, $b \approx 21{,}1785$, $c \approx 1{,}8$ булса, $a + b - c$ аңлатмасының якынча кыйммәтен табыгыз.

1065 Әгәр $a \approx 2{,}15 \cdot 10^5$ һәм $b \approx 7{,}11 \cdot 10^3$ булса, a һәм b саннары тапкырчыгышының һәм өлешенең якынча кыйммәтләрен табыгыз.

1066 Әгәр
а) $x \approx 0{,}6$ һәм $y \approx 7{,}5$;
б) $x \approx 15{,}94$ һәм $y \approx 0{,}8$
булса, xy һәм $\frac{x}{y}$ аңлатмаларының якынча кыйммәтләрен исәпләп чыгарыгыз.

1067 Әгәр $a \approx 15{,}4$ һәм $b \approx 8{,}7$ булса, яклары a м һәм b м булган турыпочмаклыкның периметрын һәм мәйданын табыгыз.

1068 Өчпочмакның нигезе a см га, ә биеклеге h см га тигез. Әгәр $a \approx 2{,}3$ һәм $h \approx 6{,}7$ булса, өчпочмакның мәйданын табыгыз.

1069 Озынлыгы 25 м булган шнурны өч өлешкә кисәннәр. Бер өлешнең озынлыгы 5,6 м, ә икенчесенеке 0,75 м. Өченче өлешнең озынлыгын табыгыз.

1070 Бакча участогының мәйданы 600 $м^2$. Участокның буе 27 м. Аның иңен табыгыз.

1071 Әгәр
а) $x \approx 9{,}26 \cdot 10^4$ һәм $y \approx 7{,}1 \cdot 10^3$;
б) $x \approx 6{,}4 \cdot 10^5$ һәм $y \approx 4{,}25 \cdot 10^6$;
в) $x \approx 3{,}705 \cdot 10^2$ һәм $y \approx 4{,}6 \cdot 10^{-4}$;
г) $x \approx 9{,}38 \cdot 10^{-3}$ һәм $y \approx 8{,}673 \cdot 10^{-1}$
булса, x һәм y суммасының якынча кыйммәтен табыгыз.

1072 Әгәр

а) $x \approx 7{,}58 \cdot 10^5$ һәм $y \approx 2{,}4 \cdot 10^3$;

б) $x \approx 2{,}4 \cdot 10^4$ һәм $y \approx 1{,}06 \cdot 10^2$;

в) $x \approx 6{,}8 \cdot 10^{-2}$ һәм $y \approx 3{,}5 \cdot 10^{-3}$;

г) $x \approx 5{,}381 \cdot 10^{-1}$ һәм $y \approx 1{,}2 \cdot 10^{-2}$

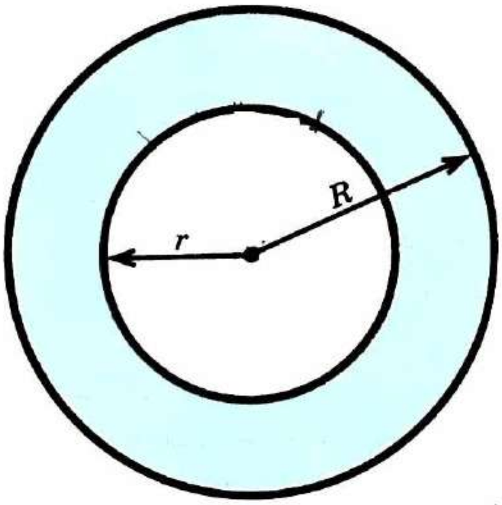
булса, x һәм y аермасының якынча кыйммәтен табыгыз.

1073 Әгәр $x \approx 8{,}35 \cdot 10^2$, $y \approx 4{,}1 \cdot 10^3$, z $6{,}3 \cdot 10^2$ булса, $x - y + z$ аңлатмасының якынча кыйммәтен табыгыз.

1074 Җирнең массасы $5{,}976 \cdot 10^{21}$ т, ә Айның массасы $7{,}35 \cdot 10^{19}$ т. Җир һәм Ай массасы икесе бергә күпме булыр? Җирнең массасы Ай массасыннан ничә тоннага артыграк?

1075 «Ленин» атом бозваткычы арктик навигацияләрнең берсендә бер рейста $8{,}16 \cdot 10^3$ диңгез миле үтә. Үтелгән ераклыкны километрларда күрсәтегез. (1 диңгез миле якынча 1,852 км га тигез.)

1076 Түгәрәк боҗраның мәйданын исәпләп чыгарыгыз, биредә $R \approx 32{,}5$ мм, $r \approx 20{,}2$ мм (рәс. 43).



Рәс. 43

Авыррак мәсьәләләр

1077 x һәм y ның $(x \neq y)$ уңай кыйммәтләре өчен $\frac{x^2-y^2}{x-y}$ вакланмасының кыйммәте $\frac{x^2+y^2}{x+y}$ вакланмасының тиңдәш кыйммәтеннән зуррак икәнен исбатлагыз.

1078 Вакланманы кыскартыгыз:

а) $\frac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^3+a^3}$; б) $\frac{8a^{n+2}+a^{n-1}}{16a^{n+4}+4a^{n+2}+a^n}$.

1079 Тигезләмәләр системасын чишегез:

$$\begin{cases} x+y+z+u=5, \\ y+z+u+v=1, \\ z+u+v+x=2, \\ u+v+x+y=0, \\ v+x+y+z=4. \end{cases}$$

1080 $x^4-5x^3-4x^2-7x+4=0$ тигезләмәсенең тискәре тамырлары булмавын исбатлагыз.

1081 $\frac{5}{14}$ һәм $\frac{5}{12}$ вакланмалары арасындагы ваклаучысы 21 гә тигез булган гади вакланманы табыгыз.

1082 $54^{35}+28^{21}$ суммасы нинди цифр белән тәмамлана?

1083 $x^2-2x+y^2-4y+5=0$ тигезләмәсен чишегез.

1084 $x^2-2x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-13=0$ тигезләмәсенең тамырларын табыгыз.

1085 Аңлатманы гадиләштерегез:

а) әгәр $1 \leq x \leq 2$ булса, $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$;

б) $\frac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

1086 Исбатлаудагы хатаны табыгыз:

$16 - 36 = 25 - 45$; $16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4}$;

$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2$;

$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$; $4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$; $4 = 5$.

1087 $x^8 + x^4 + 1$ күпбуынын нуль булмаган дәрәҗәле дүрт күпбуынның тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтегез.

1088 $\dfrac{\left(p^2 - \frac{1}{q^2}\right)^p \left(p - \frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2 - \frac{1}{p^2}\right)^q \left(q + \frac{1}{p}\right)^{p-q}}$ аңлатмасын гадиләштерегез. Үзгәрешләрнең мөмкин саналган кыйммәтләрен күрсәтегез.

1089 x тан y функциясе $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ формуласы белән бирелгән, биредә $ad - bc \neq 0$. Аргумент кыйммәтләре x_1, x_2, x_3 һәм x_4 гә функция кыйммәтләре y_1, y_2, y_3 һәм y_4 тиңдәш булсын.

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}$$

икәнен исбатлагыз.

1090 $x^2 - y^2 = 69$ тигезләмәсен канәгатьләндерүче барлык натураль саннар парларын табыгыз.

1091 $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$ аңлатмасының кыйммәте натураль сан икәнен исбатлагыз.

1092 $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$ булганда,

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

тигезсезлегенең дөрес икәнен исбатлагыз.

1093 $a + b\sqrt{2}$ рәвешендәге саннарның (биредә a һәм b — рациональ саннар) суммасы, аермасы, тапкырчыгышы һәм өлеше шундый ук рәвештә күрсәтелә алуын исбатлагыз.

1094 $(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = 1$ тигезләмәсенең чишелеше $x = 3$, $y = 2$ булуы билгеле. Бу тигезләмәне натураль саннарның теләсә никадәр башка парлары канәгатьләндерүен күрсәтегез.

1095 m ның кыйммәте нинди булганда, $x^2 + x + m = 0$ тигезләмәсенең тамырлары квадратлары суммасы 13 кә тигез була?

1096 $x^2 + px + 1 = 0$ тигезләмәсе тамырларының квадратлары суммасы 254 кә тигез. p коэффициентын табыгыз.

1097 a ның нинди кыйммәте өчен $x^2 + (a-1)x - 2a = 0$ тигезләмәсе тамырларының квадратлары суммасы 9 га тигез?

1098 $y = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}$ функциясенең сызыкча функция икәнен исбатлагыз, биредә $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$.

1099 Автобус *M* шәһәреннән *N* шәһәренә 40 км/сәг тизлек белән барырга чыга. Чирек сәгатьтән соң ул *N* шәһәреннән килүче җиңел автомашинаны очрата. Бу машина *M* шәһәренә барып җитә дә 15 мин тан соң яңадан *N* шәһәренә кайтырга чыга һәм автобусны *N* шәһәреннән 20 км ераклыкта узып китә. Әгәр җиңел машинаның тизлеге 50 км/сәг булса, *M* һәм *N* шәһәрләре арасындагы ераклыкны табыгыз.

1100 Ике малай 50 м озынлыгындагы узышу сукмагында 1 с интервал белән старт алалар. Икенче булып старт алган малай старт сызыгыннан 10 м ераклыкта беренчесен куып җитеп, сукмакның ахырына кадәр йөгерә дә шул ук тизлек белән йөгереп кире кайта. Әгәр алар, беренчесе старт алганнан соң, 10 с узгач очрашсалар, икенче малай беренчесен сукмак ахырыннан күпме ераклыкта очраткан?

1101 *A* һәм *B* пристаньнары арасындагы ераклыкны теплоход агым уңаена 5 сәг тә, ә агымга каршы 6 сәг тә үтә. Сал бу ераклыкны агым уңаена ничә сәгатьтә үтәр?

1102 Катер ниндидер вакытта агым уңаена 90 км юл үтә. Шул ук вакытта ул агымга каршы 70 км юл үтәр иде. Шундый ук вакыт эчендә сал күпме юл үтәр?

1103 *A* һәм *B* пунктларыннан бер үк вакытта бер-берсенә каршы ике велосипедчы чыга һәм *B* дан 30 км ераклыкта очрашалар. *A* һәм *B* да булганнан соң, алар кире борылалар һәм *A* дан 18 км ераклыкта икенче тапкыр очрашалар. *A* һәм *B* арасындагы ераклыкны табыгыз.

1104 *A* дан *B* га таба һәм *B* дан *A* га таба бер үк вакытта ике мотоциклчы чыга. Беренчесе очрашканнан соң 2,5 сәг үткәч *B* пунктына, ә икенчесе очрашканнан соң 1,6 сәг үткәч *A* пунктына килеп җитә. Һәр мотоциклчы юлда ничә сәгать булган?

1105 *A* дан *B* га һәм *B* дан *A* га бер үк вакытта ике автомобиль юлга чыга һәм 3 сәг тән соң алар очрашалар. Беренче автомобиль *B* га, икенчесе *A* га килгәнгә караганда 1,1 сәг кә соңрак килә. Икенче автомобильнең тизлеге беренчесенең тизлегенә караганда ничә тапкыр зуррак?

1106 Карьерда хәзерләнгән руданы беренче үзбушаткыч, икенчесенә караганда, 3 сәг кә тизрәк ташып бетерә ала. Әгәр руданың өчтән берен беренче үзбушаткыч, ә аннан соң калган өлешен икенчесе ташып бетерсә, бу эшкә, ике үзбушаткыч бергәләп эшләгәнгә караганда, $7\frac{1}{3}$ сәг артыграк вакыт китә. Һәр үзбушаткыч үзе генә әлеге руданы ничә сәгатьтә ташып бетерер?

1107 Ике слесарь йөкләмә алалар. Моны башкару өчен беренче слесарьга, икенчесенә караганда, 7 сәг артыграк вакыт кирәк. Икесе бергә йөкләмәнең яртысын үтәгәннән соң, икенче слесарьга эшне үзенә генә тәмамларга туры килә, шуңа күрә ул әлеге йөкләмәне, барлык эшне икесе бергә башкарганга караганда, 4,5 сәг кә соңрак тәмамлый. Һәр слесарь йөкләмәне ничә сәгать башкарыр иде?

1108 Икеурынлы сан бирелә. Аның берәмлекләр саны дистәләр саныннан 3 кә кимрәк. Әлеге санның шул ук цифрлар белән кире тәртиптә язылган санга тапкырчыгышы 574 кә тигез. Бирелгән санны табыгыз.

1109 $x_1 : x_2 = x_3 : x_4$ пропорциясендә беренче буын икенчесеннән 6 га зуррак, ә өченче буын дүртенчесеннән 5 кә зуррак. Пропорциянең буыннарын табыгыз. Барлык буыннарның квадратлары суммасы 793 кә тигез.

1110 Шәһәрдән үзара перпендикуляр булган ике юл буенча төрле вакытта ике җәяүле чыга. Берсенең тизлеге 4 км/сәг, ә икенчесенең 5 км/сәг. Хәзер аларның берсе шәһәрдән 7 километр, ә икенчесе 10 километр ераклыкта. Ничә сәгатьтән соң җәяүлеләр арасындагы ераклык 25 км булыр?

1111 Әгәр $z = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ булса ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $a+b \neq 0$, $a-b \neq 0$), ул вакытта $\dfrac{1}{z-a} + \dfrac{1}{z-b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ булуын исбатлагыз.

1112 Әгәр $a + c = 2b$ һәм $2bd = c(b + d)$ булса, өстәвенә $b \neq 0$ һәм $d \neq 0$, ул вакытта $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ булуын исбатлагыз.

1113 а) $y = \dfrac{1}{|x|}$; б) $y = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; в) $y = x|x|$

формуласы белән бирелгән функциянең графигын төзегез.

1114 а) $y = \sqrt{x^2} + x$; в) $y = |x+2|$;

б) $y = \sqrt{x^2} - x$; г) $y = |x-1|$

формуласы белән бирелгән функциянең графигын төзегез.

1115 $y = x + \dfrac{1}{x}$ формуласы белән бирелгән функциянең графигын төзегез.

1116 $y = \dfrac{3x+1}{x}$ функциясенең графигы:

а) $x = 0$; б) $y = 0$; в) $x = 3$; г) $y = 3$

турысы белән кисешәме?

1117 Функциянең графигын төзегез:

а) $y = \dfrac{2x+3}{x}$; в) $y = \dfrac{12}{x-4}$;

б) $y = \dfrac{4-5x}{x}$; г) $y = -\dfrac{6}{x+3}$.

1118 $xy - 2x + 3y - 6 = 0$ тигезләмәсенең графигы үзара кисешүче турылар пары икәнен исбатлагыз.

1119 $(y-2)(y+3)=0$ тигезләмәсенең графигы параллель турылар пары икәнен исбатлагыз.

1120 Тигезләмәләрнең графигын төзегез:

а) $xy+3x=0$;
б) $(x-y)(y-5)=0$;
в) $(xy-6)(y-3)=0$;
г) $(x-y)^2+(x-1)^2=0$;
д) $x^2-4=0$;
е) $y^2-9=0$.

1121 Әгәр a, b һәм c саннары өчен $a+b\neq 0$, $b+c\neq 0$, $c+a\neq 0$ шарты үтәлсә, ул вакытта

$$x=\frac{a-b}{a+b},\quad y=\frac{b-c}{b+c},\quad z=\frac{c-a}{c+a}$$

булганда, $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$ тигезлегенең дөрес икәнен исбатлагыз.

1122 Яссылыкта берничә нокта билгеләнгән, аларның нинди дә булса өч ноктасы да бер турыда ятмый. Һәр ике нокта аша туры үткәрелгән. Әгәр барысы 45 туры үткәрелгән булса, яссылыкта ничә нокта билгеләнгән?

Тарихи мәгълүматлар

Вакланмалар турында

Бик гади вакланмалардан борынгы заманнарда ук файдаланганнар (б. э. к. 2 мең ел). Мәсәлән, борынгы вавилонлылар $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ вакланмаларын махсус билгеләре белән тамгалаганнар. Борынгы Мисырда *берәмлек* вакланмалардан, ягъни $\frac{1}{n}$ рәвешендәге вакланмалардан файдаланганнар, биредә n — натураль сан. Әгәр үлчәү нәтиҗәсендә $\frac{7}{8}$ саны табылса, аны берәмлек вакланмаларның суммалары рәвешендә язганнар: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. Мәсәлән, «7 икмәкне сигез кешегә тигез итеп бүләргә» кебек мәсьәләләрне чишкәндә әлеге ысул буенча 8 ярты икмәк, 8 чирек икмәк һәм 8 әчмуха[1] икмәк кирәк, ягъни 4 икмәкне урталай бүләргә, 2 икмәкне чирекләргә бүләргә һәм бер икмәкне әчмухага бүлеп, өлешләрне кешеләргә таратырга кирәк була.

Берәмлек вакланмалар белән бер үк вакытта *систематик* вакланмалар да барлыкка килгән, ягъни бу вакланмаларның санаучыларында теләсә нинди сан, ә ваклаучыларында билгеле бер санның (мәсәлән, унның, уникенең, алтмышның) дәрәҗәсе язылган. Алтмышарлы вакланмалар XVII гасырга кадәр файдаланылганнар. Вакыт берәмлеге хәзерге көнгә кадәр алтмышарлы системада аңлатыла: 1 минут $=\frac{1}{60}$ сәгать, 1 секунд $=\frac{1}{60^2}$ сәгать.

Унарлы вакланмалар да систематик вакланмаларга керәләр. Санаучылары һәм ваклаучылары теләсә нинди натураль сан булган гомуми рәвештәге вакланмалар борынгы грек галиме Архимедның (б. э. к. 287—212 еллар) кайбер әсәрләрендә күренә.

[1] Әчмуха — кадакның сигездән бер өлеше, 50 грамм.

Борынгы греклар гади вакланмалар белән барлык гамәлләрне башкара алганнар. Ләкин вакланмаларның сызыкча ярдәмендә хәзерге язылышы булмый. Вакланмаларның хәзергечә язылышы бары тик 1202 елда Италия математигы Л. Фибоначчи (1180—1240) тарафыннан аның «Әбәк китабы» исемле әсәрендә кертелә. Моңа кадәр вакланмаларны сүз белән аңлаталар, аерым язмалар кулланалар, бу язмаларда вакланманың ваклаучысын күрсәткән сан янына уңнан штрих куелган һәм башка ысулдагы язмалар файдаланылган. Озак еллар буе вакланманы саннар дип атамаганнар. Кайчак аларны «сынык» саннар дип атаганнар. Фәкать XVIII г. да гына вакланмаларны сан итеп кабул итә башлаганнар. Моңа 1707 елда инглиз галиме И. Ньютонның (1643—1727) «Гомуми арифметика» исемле китабы чыгу сәбәп булган. Әлеге китапта вакланмалар тигез хокуклы саннар булып кына калмый, бер аңлатманы икенче аңлатмага бүлгәндә барлыкка килгән өлеш буларак вакланма төшенчәсе тагын да киңәя. Әлеге китапта менә нәрсә диелә: «Ике зурлыкның берсен икенчесе астына язып, алар арасына сызык куеп язу өлешне яки өстәге зурлыкны астагы зурлыкка бүлгәндә барлыкка килгән зурлыкны аңлата. Мәсәлән, $\frac{6}{2}$ язуы 6 ны 2 гә бүлгәндә барлыкка килгән зурлыкны, ... $\frac{5}{8}$ язуы 5 не 8 гә бүлгәндә хасил булган зурлыкны, ... $\frac{a}{b}$ язуы a ны b га бүлгәндә хасил булган зурлыкны, ... $\frac{ab-bb}{a+x}$ исә $ab-bb$ ны $a+x$ ка бүлгәндә барлыкка килгән зурлыкны аңлата һ. б. Мондый төр зурлыклар вакланмалар дип атала».

Реаль саннар турында

Сан төшенчәсе бик борынгы заманнарда барлыкка килгән. Күп гасырлар дәвамында бу төшенчә киңәйтелә һәм баетыла. Үлчәү эшләрен башкару зарурлыгы уңай рациональ саннарны ачуга китерә. Тигезләмәләр чишелеше исә тискәре саннарны барлыкка китерә. Ләкин озак еллар буена аларны «ялган» саннар дип йөртәләр һәм «бирәчәк» «җитмәүчелек» итеп төшендереп киләләр. Уңай һәм тискәре саннар белән гамәл кагыйдәләре озак еллар буе кушу һәм алу очраклары өчен генә тикшерелгәннәр. Мәсәлән, VII г. дагы һинд математиклары әлеге кагыйдәләрне түбәндәгечә әйткәннәр: «Ике милекнең суммасы — милек, ике бурычның суммасы — бурыч, милек һәм бурычның суммасы аларның аермасына тигез». Бары тик XVII гасырда, Декарт һәм Ферма тарафыннан кертелгән координаталар методын файдалана башлагач кына, тискәре саннар уңай саннар белән тигез хокуклы саннар буларак кабул ителәләр.

Бөтен һәм вакланма саннар рациональ саннар күплеген тәшкил итәләр. Әлеге саннар исәпләп чыгару өчен уңайлы: ике рациональ санның суммасы, аермасы, тапкырчыгышы һәм өлеше

(бүлүче нульдән башка сан булганда) рациональ сан була. Рациональ саннар тыгызлык үзлегенә ия булганлыктан, теләсә нинди кисемтәне берәмлек итеп кабул ителгән кисемтә белән теләсә нинди дәрәҗәдәге төгәллектә үлчәргә һәм үлчәү нәтиҗәләрен рациональ сан белән аңлатырга мөмкин. Шуңа күрә рациональ саннар озак еллар буена (һәм хәзерге көндә дә) кешеләрнең практик ихтыяҗларын тулысынча канәгатьләндереп киләләр. Шулай да зурлыкларны үлчәү мәсьәләсе яңа иррациональ саннар хасил булуга китерә. Борынгы Грециядә үк Пифагор мәктәбендә (б. э. кадәр VI г.) квадратның диагонален, әгәр үлчәү берәмлеге итеп аның ягы кабул ителгән булса, рациональ сан белән аңлату мөмкин түгеллеге исбат ителгән була. Квадратның диагонале һәм аның яклары кебек кисемтәләрне үлчәнешсез кисемтәләр дип атыйлар. Моннан соң (б. э. к. V—IV гасырлар) борынгы грек математиклары тарафыннан тулы квадрат булмаган теләсә нинди натураль n өчен $\sqrt{n}$ ның иррациональ булуы исбатлана.

Һиндстан, Якын һәм Урта Көнчыгыш, ә соңрак Европа математиклары иррациональ зурлыклардан файдаланганнар. Ләкин озак вакытлар аларны тигез хокуклы саннар итеп кабул итмәгәннәр. Аларны саннар итеп кабул итүгә Декарт «Геометрия»сенең барлыкка килүе ярдәм итә. Координаталар турысында һәрбер рациональ яки иррациональ сан нокта белән сурәтләнә, һәм киресенчә, координаталар турысындагы һәрбер ноктага ниндидер рациональ яки иррациональ сан, ягъни реаль сан тиңдәш була. Иррациональ саннарны кертү белән координаталар турысындагы барлык «бушлыклар» тутырылды. Әлеге үзлекне күздә тотып, реаль саннарның күплеге (рациональ саннар күплегеннән аермалы буларак) өзлексез була.

Теләсә нинди реаль санны чиксез унарлы вакланмалар (периодик яки периодик булмаган) рәвешендә күрсәтергә була. Л. Эйлер (1707—1783) һәм И. Ламберт (1728—1777) теләсә нинди периодик булган чиксез унарлы вакланманың рациональ сан булуын күрсәттеләр. Периодик булмаган чиксез унарлы вакланма иррациональ санны тәшкил итә. Реаль саннарның чиксез унарлы вакланмалар нигезендә төзелеше немец математигы К. Вейерштрасс (1815—1897) тарафыннан бирелә. Реаль саннар теориясен үстерүдәге фикерләр немец математиклары Р. Дедекинд (1831—1916) һәм Г. Кантор (1845—1918) тарафыннан бирелә.

Квадрат тамырлар турында

Озак еллар дәвамында квадрат ягының бирелгән озынлыгы буенча аның мәйданын табу мәсьәләсе белән беррәттән моңа кире мәсьәләне дә чишәргә кирәк булган: «Квадратның мәйданы a га тигез булсын өчен, аның ягы нинди булырга тиеш?» Мондый

мәсьәләне моннан 4 мең ел элек үк Вавилония галимнәре чишә белгәннәр. Алар саннарның квадратлары һәм саннардан квадрат тамыр таблицаларын төзегәннәр.

Вавилонлылар якынча квадрат тамыр алу методыннан файдаланганнар, ул моннан гыйбарәт. a — тулы квадрат булмаган ниндидер сан (натураль сан күздә тотыла) булсын. a ны $b^2 + c$ суммасы рәвешендә күрсәтик, биредә c кушылучысы b^2 ка карагында шактый кечерәк. Ул вакытта

$$\sqrt{a} = \sqrt{b^2 + c} \approx b + \frac{c}{2b}.$$

Мәсәлән, әгәр $a = 112$ булса, $\sqrt{112} = \sqrt{10^2 + 12} \approx 10 + \frac{12}{20} = 10,6$ була. Тикшерү $10,6^2 = 112,36$ икәнен күрсәтә.

Квадрат тамыр алуның әлеге методы борынгы грек галиме Герон Александрийский (б. э. I гасыр) тарафыннан җентекләп тасвирланган.

Яңарыш чорында Европа математиклары тамырны латин сүзе *Radix* (тамыр) аша, ә аннан соң кыскача *R* аша (моннан тамыр тамгасы дип атала торган «радикал» термины барлыкка килә) билгеләгәннәр. XV гасырның кайбер немец математиклары квадрат тамырны билгеләү өчен ноктадан файдаланганнар. Әлеге ноктаны алар тамыр алынырга тиешле сан алдына куйганнар. Соңрак нокта урынына кечкенә ромб (♦), ә ахырда ∨ тамгасын куеп, тамыр алына торган аңлатма өстенә сызык куйганнар. Аннан соң ∨ тамгасын һәм сызыкны тоташтыра башлаганнар. Мондый язылышлар Декартның «Геометрия»сендә һәм Ньютонның «Гомуми арифметика»сында очрый. Тамырның хәзерге язылышы француз математигы М. Рольнең (1652—1719) «Алгебра кулланмасы» китабында барлыкка килә.

Квадрат тигезләмәләр турында

Тулы булмаган квадрат тигезләмәләрне һәм тулы квадрат тигезләмәләрнең аерым төрләрен ($x^2 \pm x = a$) вавилонлылар чишә белгәннәр (б. э. к. 2 мең ел чамасы). Бу турыда рецепт рәвешендә чишелешләре бирелгән чөй язулы тексттагы мәсьәләләр сөйли. Борынгы грек математиклары квадрат тигезләмәләрнең кайбер төрләрен, аларның чишелешләрен геометрик төзүгә кайтарып чишә алганнар. Геометриягә мөрәҗәгать итми генә тигезләмәләрне чишү алымнарын Диофант Александрийский (III гасыр) бирә. 13 «Арифметика» китабының безнең көннәргә кадәр сакланган 6 сында мәсьәләләрнең чишелешләре бирелгән. Диофант, әлеге чишелешләрдә $ax = b$ яки $ax^2 = b$ рәвешендәге тигезләмәнең чишелешен табу өчен, билгесезне ничек сайлап алырга кирәклеген аңлата. Диофантның тулы квадрат тигезләмәләрне чишү ысуллары бирелгән «Арифметика» китаплары безнең көннәргә кадәр сакланмаган.

$ax^2 + bx = c$ рәвешенә китерелгән, биредә $a > 0$, квадрат тигезләмәләрне чишү кагыйдәсен һинд галиме Брахмагупта (VII гасыр) биргән. «Китаб аль-джебр валь-мукабала» трактатында Харәзм математигы әл-Харәзми $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 + bx = c$, $bx + c = ax^2$ (a, b һәм c хәрефләре белән уңай саннар гына билгеләнгән) рәвешендәге тигезләмәләрне чишү алымнарын тикшерә һәм бары тик уңай тамырларны гына таба.

$x^2 + bx = c$ рәвешенә китерелгән квадрат тигезләмәләрне чишүнең гомуми кагыйдәсе немец математигы М. Штифель (1487—1567) тарафыннан әйтелә. Гомуми рәвештәге квадрат тигезләмәләрнең чишү формулаларын чыгару белән Виет шөгыльләнә. Ләкин ул үзенең фикерләрен уңай тамырлар өчен генә әйткән (тискәре саннарны ул кабул итмәгән). Нидерланд математигы А. Жирар (1595—1632) һәм шулай ук Декарт һәм Ньютон хезмәтләреннән соң квадрат тигезләмәләрне чишү ысулы хәзерге рәвешен алган.

Тигезләмә тамырларының аның коэффициентларына бәйлелеген аңлаткан формулалар 1591 елда Виет тарафыннан чыгарылган. Квадрат тигезләмә өчен Виет теоремасы хәзерге тамгаланышларда түбәндәгечә күрсәтелгән: $(a + b)x - x^2 = ab$ тигезләмәсенең тамырлары булып a һәм b саннары хезмәт итә.

Тигезсезлекләр турында

«Зуррак» һәм «кечерәк» төшенчәләре тигезлек төшенчәсе белән бергә предметларны исәпләгәндә һәм төрле зурлыкларны чагыштырганда барлыкка килгәннәр. Борынгы греклар ук тигезсезлек төшенчәләреннән файдаланганнар. Архимед (б. э. к. III г.) әйләнә озынлыгын исәпләү белән шөгыльләнгәндә «теләсә нинди түгәрәкнең периметры артыгы белән алынган өчләтелгән диаметрга тигез, әлеге артыклык диаметрның җиденче өлешеннән кимрәк, ләкин җитмеш бердән уннан зуррак була» дигән фикерне раслаган. Икенче төрле әйткәндә, Архимед π санының чикләрен күрсәткән:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Евклид үзенең «Начала» исемле әһәмиятле трактатында күп кенә тигезсезлекләрне китерә. Ул, мәсәлән, ике уңай санның геометрик уртасы аларның арифметик уртасыннан зуррак түгеллеген, ягъни $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ тигезсезлегенең дөрес икәнен исбат итә. Папп Александрийскийның (III г.) «Математик җыентыгы»нда, әгәр $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ булса (биредә a, b, c һәм d — уңай саннар), $ad > bc$ икәне исбатлана.

Ләкин әлеге барлык фикер йөртүләр, күпчелек очракта геометрик терминологиягә таянып, телдән үткәреләләр. Тигезсезлекләрнең хәзерге заман тамгалары бары тик XVII—XVIII гасырларда гына барлыкка килгән. $<$ һәм $>$ тамгаларын инглиз

математигы Т. Гарриот (1560—1621), ≤ һәм ≥ тамгаларын француз математигы П. Буге (1698—1758) керткән.

Тигезсезлекләр һәм тигезсезлекләр системалары теоретик тикшеренүләрдә һәм мөһим практик мәсьәләләрне чишүдә киң файдаланылалар.

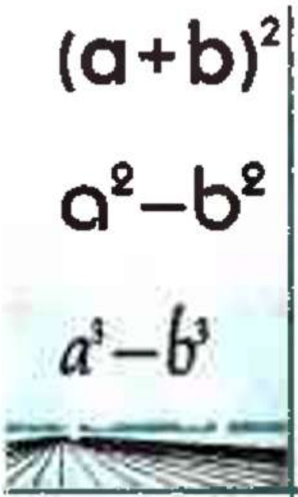
Якынча исәпләүләр турында

Якынча исәпләүләрнең кайбер алымнары борынгы заманда ук кулланылган. Бу хәл практик таләпләр аркасында барлыкка килгән, чөнки зурлыкларны үлчәгәндә һәрвакытта якынча кыйммәтләр хасил була. Кешеләр һәрвакытта да исәпләү эшләрен җиңеләйтергә омтылганнар. Моның өчен төрле таблицалар төзелгән. Вакланмалар белән исәпләү эшләре бик катлаулы булган борынгы мисырлылар ук, вакланмаларны берәмлек вакланмаларының суммалары аша аңлату өчен, таблицалар төзегәннәр. Борынгы вавилонлылар квадратлар, кублар, кире зурлыкларның таблицаларын эшләгәннәр.

Якынча исәпләүләр теориясе үсешенә академик Алексей Николаевич Крылов (1863—1945) зур өлеш кертә.

Күренекле корабль төзүче, математик һәм механик буларак, ул техник мәсьәләләрне чишүгә математик методлар куллана. Исәпләүләрне рациональ башкару мәсьәләсенә бик нык игътибар иткән.

Ул исәпләүнең практика таләпләренә җавап бирерлек төгәллектә башкарылырга тиешлеген, өстәвенә теләсә нинди дөрес булмаган цифрның хата тәшкил итүен, һәм теләсә нинди артык цифрның ярым хата икәнен әйткән.



VII класс Алгебра курсы буенча белешмәләр

Аңлатмалар һәм аларның рәвешләрен үзгәртү

1. a санының $n > 1$ булган n натураль күрсәткечле дәрәҗәсе дип һәркайсы a га тигез n тапкырлаучының тапкырчыгышы атала:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ тапкыр}}.$$

Күрсәткече 1 булган a санының дәрәҗәсе a саны үзе була:

$$a^1 = a.$$

Күрсәткече 0 булган $a \neq 0$ санының дәрәҗәсе 1 гә тигез:

$$a^0 = 1.$$

2. Натураль күрсәткечле дәрәҗәләрнең үзлекләре:

а) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Нигезләре бердәй булган дәрәҗәләрне тапкырлаганда, нигез үзе языла, ә дәрәҗә күрсәткечләрен кушалар.

б) $a^m : a^n = a^{m-n}$, биредә $a \neq 0$, $m \geq n$.

Нигезләре бердәй булган дәрәҗәләрне бүлгәндә, нигез үзе языла, ә бүленүченең дәрәҗә күрсәткеченнән бүлүченең дәрәҗә күрсәткечен алалар.

в) $(a^m)^n = a^{mn}$.

Дәрәҗәне дәрәҗәгә күтәргәндә, нигезнең үзен язалар, ә күрсәткечләрен тапкырлыйлар.

г) $(ab)^n = a^n b^n$.

Тапкырчыгышны дәрәҗәгә күтәргәндә, һәр тапкырлаучыны әлеге дәрәҗәгә күтәреп, нәтиҗәләрне тапкырлыйлар.

3. Саннарның, үзгәрешлеләрнең һәм үзгәрешлеләрнең дәрәҗәләре тапкырчыгышы, шулай ук саннар, үзгәрешлеләр һәм

үзгәрешлеләрнең дәрәҗәләре бербуыннар дип атала. Мәсәлән, $5a^2x$, $-3a^2b^3$, 4, x, y^5 — бербуыннар.

Бербуынга кергән үзгәрешлеләрнең дәрәҗә күрсәткечләренең суммасы бербуынның дәрәҗәсе дип атала. Мәсәлән, $-8a^2b^4$ бербуынының дәрәҗәсе 6 га тигез.

4. Бербуыннарның суммасы күпбуын дип атала. Мәсәлән, $3x^5 - 4x^2 + 1$, $7a^3b - ab^2 + ab + 6$ — күпбуыннар. Бербуыннарны да бер генә буыннан торган күпбуын дип исәплиләр.

Стандарт рәвештәге күпбуынга кергән бербуыннарның иң зур дәрәҗәлесе күпбуынның дәрәҗәсе дип атала. Мәсәлән, $5x^3y + 3x^2y^5 + xy$ күпбуынының дәрәҗәсе $3x^2y^5$ бербуынының дәрәҗәсенә, ягъни 7 гә тигез.

Стандарт рәвештә язылмаган күпбуынның дәрәҗәсе дип аңа бердәй тигез булган стандарт рәвештәге күпбуынның дәрәҗәсе атала.

5. Күпбуыннарны кушканда җәяләр ачу кагыйдәсеннән файдаланалар: әгәр дә җәяләр алдында «плюс» тамгасы торса, җәя эчендәге һәр кушылучының үз тамгасын саклап, җәяләрне төшереп калдырырга була. Мәсәлән,

$$(3ab + 5c^2) + (ab - c^2) = 3ab + 5c^2 + ab - c^2 = 4ab + 4c^2.$$

Күпбуыннарны алганда җәяләр ачу кагыйдәсеннән файдаланалар: әгәр дә җәяләр алдында «минус» тамгасы торса, җәя эчендәге һәр кушылучының тамгасын капма-каршыга үзгәртеп, җәяләрне төшереп калдырырга мөмкин. Мәсәлән,

$$(6x^2 - y) - (2x^2 - 8y) = 6x^2 - y - 2x^2 + 8y = 4x^2 + 7y.$$

Бербуынны күпбуынга тапкырлау өчен, әлеге бербуынны күпбуынның һәр буынына тапкырлап, барлыкка килгән тапкырчыгышларны кушарга кирәк. Мәсәлән,

$$a^2(3ab - b^3 + 1) = 3a^3b - a^2b^3 + a^2.$$

Күпбуынны күпбуынга тапкырлау өчен, күпбуыннарның берсенең һәр буынын икенче күпбуынның һәр буынына тапкырлап, барлыкка килгән тапкырчыгышларны кушарга кирәк. Мәсәлән,

$$(5x - 1)(3x + 2) = 15x^2 - 3x + 10x - 2 = 15x^2 + 7x - 2.$$

6. Кыскача тапкырлау формулалары:

а) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Ике аңлатманың суммасы квадраты беренче аңлатманың квадратына плюс беренче һәм икенче аңлатмаларның икеләтелгән тапкырчыгышына, плюс икенче аңлатманың квадратына тигез.

б) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Ике аңлатманың аермасы квадраты беренче аңлатманың квадратына, минус беренче һәм икенче аңлатмаларның икеләтелгән тапкырчыгышына, плюс икенче аңлатманың квадратына тигез.

в) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Ике аңлатманың аермасы белән аларның суммасының тапкырчыгышы бу аңлатмаларның квадратлары аермасына тигез.

7. Күпбуынны күпбуыннар тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтү күпбуынны тапкырлаучыларга таркату дип атала.

Күпбуыннарны тапкырлаучыларга таркату өчен түбәндәге ысуллар: тапкырлаучыны җәя тышына чыгару, группалау, кыскача тапкырлау формулалары кулланыла. Мәсәлән, $5x^3-x^2y$ күпбуынын x^2 ны җәя тышына чыгарып таркатырга мөмкин: $5x^3-x^2y=x^2(5x-y)$; $3x-3y-ax+ay$ күпбуынын, группалау ысулын кулланып, тапкырлаучыларга таркатырга мөмкин: $3x-3y-ax+ay=(3x-3y)-(ax-ay)=3(x-y)-a(x-y)=(x-y)(3-a)$; a^4-25x^2 күпбуынын, ике аңлатманың квадратлары аермасы формуласыннан файдаланып, тапкырлаучыларга таркатырга мөмкин: $a^4-25x^2=(a^2)^2-(5x)^2=(a^2-5x)(a^2+5x)$.

Кайчак берничә ысулны бер-бер артлы кулланып, күпбуынны тапкырлаучыларга таркатырга була.

Кубларның суммасын һәм аермасын

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \text{ һәм } a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

формулалары буенча тапкырлаучыларга таркатырга була.

Ике аңлатманың кублары суммасы әлеге аңлатмаларның суммасы белән алар аермасының тулы булмаган квадратлары тапкырчыгышына тигез;

ике аңлатманың кублары аермасы әлеге аңлатмаларның аермасы белән алар суммасының тулы булмаган квадратлары тапкырчыгышына тигез.

Тигезләмәләр

8. Үзгәрешленең тигезләмәне дөрес тигезлеккә әйләндерә торган кыйммәте бер үзгәрешлеле тигезләмәнең тамыры дип атала. Мәсәлән, 8 саны $3x+1=5x-15$ тигезләмәсенең тамыры, чөнки $3\cdot8+1=5\cdot8-15$ тигезлеге дөрес тигезлек була.

Бер үзгәрешлеле тигезләмәне чишү — аның барлык тамырларын табу яки аларның булмавын исбат итү ул.

9. Тамырлары бер үк булган бер үзгәрешлеле тигезләмәләрне тигезкөчле тамырдаш тигезләмәләр дип атыйлар. Мәсәлән, $x^2=25$ һәм $(x+5)(x-5)=0$ тигезләмәләре тигезкөчле. Аларның һәркайсының ике тамыры бар: -5 һәм 5. Тамырлары булмаган тигезләмәләрне шулай ук тигезкөчле тигезләмәләр дип атыйлар.

Бер үзгәрешлеле тигезләмәләрне чишкәндә түбәндәге үзлекләр файдаланыла:

әгәр тигезләмәдәге бер кушылучыны аның тамгасын үзгәртеп, тигезләмәнең бер кисәгеннән икенче кисәгенә күчерсәк, бирелгәнгә тигезкөчле (тамырдаш) тигезләмә барлыкка килер;

әгәр тигезләмәнең ике кисәген дә нульгә тигез булмаган бер үк санга тапкырласаң яки бүлсәң, бирелгән тигезләмәгә тигезкөчле тигезләмә барлыкка килер.

10. $ax = b$ рәвешендәге тигезләмә бер үзгәрешлеле сызыкча тигезләмә дип атала, биредә x — үзгәрешле, a һәм b — саннар.

Әгәр $a \neq 0$ булса, $ax = b$ тигезләмәсенең бердәнбер тамыры була: $\frac{b}{a}$. Мәсәлән, $7x = 2$ тигезләмәсенең тамыры $\frac{2}{7}$.

Әгәр $a = 0$ һәм $b \neq 0$ булса, $ax = b$ тигезләмәсенең тамырлары булмый. Мәсәлән, $0 \cdot x = 7$ тигезләмәсенең тамырлары юк.

Әгәр $a = 0$ һәм $b = 0$ булса, теләсә нинди сан $ax = b$ тигезләмәсенең тамырлары була.

11. Үзгәрешлеләрнең ике үзгәрешлеле тигезләмәне дөрес тигезлеккә әйләндерүче кыйммәтләре пары ике үзгәрешлеле тигезләмәнең чишелеше дип атала. Мәсәлән, $x = -1$, $y = 4$ саннар пары $5x + 3y = 7$ тигезләмәсенең чишелеше була.

Чишелешләре бер үк булган ике үзгәрешлеле тигезләмәләрне тигезкөчле тигезләмәләр дип атыйлар. Чишелешләре булмаган ике үзгәрешлеле тигезләмәләрне шулай ук тигезкөчле тигезләмәләр дип атыйлар.

Ике үзгәрешлеле тигезләмәдә кушылучыны, аның тамгасын үзгәртеп, тигезләмәнең бер кисәгеннән икенче кисәгенә чыгарырга була, һәм тигезләмәнең ике кисәген дә нульгә тигез булмаган бер үк санга тапкырларга яки бүләргә була. Бу вакытта баштагы тигезләмәгә тигезкөчле булган тигезләмә барлыкка килә.

12. $ax + by = c$ рәвешендәге тигезләмә ике үзгәрешлеле сызыкча тигезләмә дип атала, биредә x һәм y — үзгәрешлеләр, a, b һәм c — саннар.

13. Координаталары ике үзгәрешлеле тигезләмәнең чишелеше булган координаталар яссылыгының нокталары күплеге әлеге тигезләмәнең графигы дип атала.

Үзгәрешлеләр алдындагы коэффициентларының берсе генә булса да нульгә тигез булмаган ике үзгәрешлеле сызыкча тигезләмәнең графигы туры сызык була.

14. Үзгәрешлеләрнең ике үзгәрешлеле тигезләмәләр системасындагы һәр тигезләмәне дөрес тигезлеккә әверелдерүче кыйммәтләре пары әлеге системаның чишелеше дип атала. Мәсәлән, $x = 7$, $y = -1$ саннары пары $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - y = 15 \end{cases}$ системасының чишелеше

була, чөнки $7+(-1)=6$ һәм $2\cdot 7-(-1)=15$ тигезлекләренең һәркайсы дөрес.

Тигезләмәләр системасын чишү — аның барлык чишелешләрен табу яки аның чишелешләре булмавын исбатлау дигән сүз.

Бер үк чишелешле ике үзгәрешлеле тигезләмәләр системасы тигезкөчле тигезләмәләр системасы дип атала. Чишелешләре булмаган системалар шулай ук тигезкөчле системалар дип санала.

15. Ике үзгәрешлеле тигезләмәләр системасын чишү өчен, алыштырып кую ысулы, кушу ысулы, график ысулы кулланыла.

Функцияләр

16. Функциональ бәйлелек яки функция — бәйсез үзгәрешленең һәрбер кыйммәтенә бәйле үзгәрешленең бердәнбер кыйммәте тиңдәш була торган ике үзгәрешле арасындагы бәйлелек ул.

Бәйсез үзгәрешлене башкача аргумент дип атыйлар, ә бәйле үзгәрешлене әлеге аргументның функциясе дип йөртәләр. Бәйсез үзгәрешле кабул иткән барлык кыйммәтләр функциянең билгеләнү өлкәсен тәшкил итә.

Абсциссалары аргумент кыйммәтенә, ә ординаталары функциянең тиңдәш кыйммәтләренә тигез булган нокталар күплеге функциянең графигы дип атала.

17. $y=kx+b$ рәвешендәге формула белән бирергә мөмкин булган функция сызыкча функция дип атала, биредә x — бәйсез үзгәрешле, k һәм b — саннар.

$y=kx+b$ сызыкча функциясенең графигы туры сызык була. k санын $y=kx+b$ функциясенең графигы булган турының почмакча коэффициенты дип атыйлар.

Әгәр $k\neq 0$ булса, $y=kx+b$ функциясенең графигы x лар күчәрен кисә, әгәр $k=0$ һәм $b\neq 0$ булса, $y=kx+b$ функциясенең графигы — туры сызык x лар күчәренә параллель була;

әгәр $k=0$ һәм $b=0$ булса, функциянең графигы x лар күчәре белән тәңгәл килә.

Әгәр ике сызыкча функциянең почмакча коэффициентлары төрле булса, әлеге функцияләрнең графиклары үзара кисешә, әгәр аларның почмакча коэффициентлары бердәй булса, алар параллель була.

$y=kx$ формуласы белән бирелә торган сызыкча функцияне $k\neq 0$ өчен туры пропорциональлек дип атыйлар.

Туры пропорциональлекнең графигы — координаталар башлангычы аша үткән туры ул. $k>0$ булганда, график — координаталарның беренче һәм өченче чирегендә, ә $k<0$ булганда, икенче һәм дүртенче чирегендә урнаша.

18. $y=x^2$ функциясенең графигы — парабола. Бу график координаталар башлангычы аша үтә һәм координаталарның

беренче һәм икенче чирегендә урнаша. Ул y күчәренә карата симметрик.

$y = x^3$ функциясенең графигы координаталар башлангычы аша үтә һәм координаталарның беренче һәм өченче чирегендә ята. Ул координаталар башлангычына карата симметрик.

Якынча исәпләүләр

19. Сан һәм аның якынча кыйммәте арасындагы аерманың модуле санның якынча кыйммәтенең абсолют хатасы дип атала.

Якынча кыйммәтнең абсолют хатасы ниндидер h саныннан артмаса, әлеге кыйммәтне h ка кадәр төгәллек белән алынган якынча кыйммәт дип атыйлар.

Абсолют хатаның якынча кыйммәт модуленә чагыштырмасын якынча кыйммәтнең чагыштырма хатасы дип атыйлар.

Татарча-русча атамалар күрсәткече

Арифметик квадрат тамыр — арифметический квадратный корень 66
Аңлатмаларның рәвешен бердәй үзгәртү — тождественное преобразование выражений 8
Бер үзгәрешле сызыкча тигезсезлек — линейное неравенство с одной переменной 161
Бердәй тигез аңлатмалар — тождественно равные выражения 8
Бердәйлек — тождество 8
Бөтен аңлатма — целое выражение 3
Бөтен күрсәткечле дәрәҗә — степень с целым показателем 182
Вакланмалы рациональ тигезләмә — дробное рациональное уравнение 126
Виет теоремасы — теорема Виета 121
Виет теоремасына кире теорема — обратная теорема Виета 122
Дөрес цифр — верная цифра 191
Иррациональ сан — иррациональное число 62
Квадрат тамыр — квадратный корень 66
Квадрат тигезләмә — квадратное уравнение 105
Квадрат тигезләмәнең дискриминанты — дискриминант квадратного уравнения 133
Кире пропорциональлек — обратная пропорциональность 41
Китерелгән квадрат тигезләмә — приведенное квадратное уравнение 109
Рациональ аңлатма — рациональное выражение 3
Рациональ вакланма — рациональная дробь 3
Рациональ сан — рациональное число 55
Рациональ тигезләмә — рациональное уравнение 126
Реаль саннар — действительные числа 55
Периодик булмаган чиксез унарлы вакланма — бесконечная десятичная непериодическая дробь 62
Периодик чиксез унарлы вакланма — бесконечная десятичная периодическая дробь 57
Санлы тигезсезлекләрне кушу — сложение числовых неравенств 151
Санлы тигезсезлекләрне тапкырлау — умножение числовых неравенств 151
Саннар аралыгы — числовой промежуток 154
Санның стандарт рәвеше — стандартный вид числа 187
Санның тәртибе — порядок числа 187
Тапкырлаучыны тамыр тамгасы астына кертү — внесение множителя под знак корня 89
Тапкырлаучыны тамыр тамгасы тышына чыгару — вынесение множителя из-под знака корня 89
Тамырасты аңлатмасы — подкоренное выражение 66
Тигезкөчле тигезсезлекләр — неравенства равносильные 159
Тулы булмаган квадрат тигезләмә — неполное квадратное уравнение
Чиксез унарлы вакланма — бесконечная десятичная дробь 57
Өстәмә тапкырлаучы — дополнительный множитель 9
Үзгәрешленең мөмкин саналган кыйммәтләре — допустимые значения переменных 4

Җаваплар

I бүлек

4. а) -10; б) 2,5; в) $-15,5$; г) 4. **9.** $t=\frac{S}{v_1+v_2}$; а) 2,5; б) 2. **13.** д) -6 һәм 6 дан башка барлык саннар; е) -7 һәм 0 дән башка барлык саннар. **25.** а) $\frac{2b}{a^2}$; б) $\frac{1}{2x^2y}$; в) $\frac{p^2q^2}{2}$; г) $2m$; д) $-\frac{8b}{3c}$; е) $\frac{1}{3}$. **27.** а) 1; б) 3. **29.** а) $\frac{a+4b}{2ab}$; б) $\frac{3b-4c}{2b}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{5x}{6}$; д) $\frac{1}{a}$; е) $3x$. **30.** а) $\frac{y-4}{3}$; б) $\frac{5}{x+3y}$; в) $\frac{c+2}{7c}$; г) $\frac{6c}{d-3}$; д) $\frac{a+5}{a-5}$; е) $\frac{y+3}{y-3}$. **31.** а) $\frac{1}{a+b}$; б) a^2+ab+b^2. **32.** а) 100; б) 1,5. **33.** а) $\frac{x}{y}$; б) $\frac{5}{8}$; в) $\frac{2}{m-7}$; г) $\frac{p+5q}{2}$; д) $\frac{x-2}{x}$; е) $\frac{3y}{y+8}$; ж) $\frac{1}{a-1}$; з) $\frac{1}{b^2-2b+4}$. **34.** а) $3x-y$; б) $\frac{a}{2b-1}$; в) $\frac{1}{x-2}$; г) $1-a+a^2$. **35.** а) $\frac{b+2}{7}$; б) $\frac{4}{b-d}$; в) $\frac{y-1}{x+y}$; г) $\frac{a+c}{a-x}$. **37.** а) -1; б) 1; в) $b-a$; г) $\frac{1}{a-b}$; д) $a+b$; е) 1. **38.** в) $-\frac{3}{b}$; г) $-\frac{1}{3}$; д) $-\frac{a+5}{3}$; е) $\frac{3}{1-x}$; ж) $\frac{8a+8b}{b-a}$; з) $b-2$. **39.** а) $\frac{a+b}{b}$; б) $\frac{2-b}{5}$; в) $-2\frac{1}{3}$; г) $-\frac{3}{8}$; д) $\frac{x+2}{5}$; е) $\frac{3-a}{9+3a+a^2}$. **40.** а) x^2; б) $-y^4$; в) $-b^5$; г) c^3-c^2. **41.** а) $-\frac{1}{8}$; б) 0,01; **42.** а) $4a-4b$; б) $9c+27d$; в) $\frac{9x+18y}{5}$; г) $\frac{2x-y}{50x+25y}$. **46.** а) $\frac{40x}{15x^2y^2}$; б) $\frac{5abc^2}{35a^3c^3}$; в) $\frac{a^2}{a^2-2a}$; г) $\frac{x^2-x+1}{x^3+1}$; д) $\frac{-12}{x-y}$; е) $\frac{-4a-a^2}{16-a^2}$. **47.** а) $-3,2$; б) 0,1; в) 12; г) $-0,5$; д) 5. **48.** в) $5x^2+12xy-18y^2$; г) $3a^2-0,5ab$. **54.** а) $\frac{27-13x}{x}$; б) $\frac{15p-2}{3p^3}$; в) $\frac{y-1}{y}$; г) $\frac{b-a}{2}$; д) $\frac{2p-11q}{5p}$; е) $-\frac{d}{c}$; ж) $\frac{12}{b}$; з) $\frac{2}{3}$. **57.** а) 100; б) 10. **58.** а) 16,25; б) 6. **59.** а) $\frac{x-5}{y-1}$; б) $\frac{a+6}{c-3}$; в) 2; г) -5; д) $a-4$; е) $x-3y$. **60.** а) $\frac{7p}{p-q}$; б) 5; в) 1; г) -1; д) $\frac{1}{a+3}$; е) $y+1$. **62.** а) $\frac{x+5}{x-5}$; б) $\frac{1}{x-5}$. **63.** а) $\frac{x-4}{x+4}$; б) $\frac{8+a}{8-a}$. **67.** а) 7;

б) 3; в) 1; г) -20; **70.** з) $\frac{y}{72c}$; и) $\frac{11a}{90b}$. **71.** б) $\frac{2}{15}$; г) $\frac{3y^2-4b^2}{120by}$.

72. д) $\frac{41a+13b}{36a}$; е) $\frac{9x+16}{24y}$. **73.** г) $\frac{a^2+b^2}{a^2b}$; д) $\frac{4a^2-3ab-3b^2}{a^2b^2}$; е) $\frac{x^2-xy-2y^2}{x^2y^2}$.

74. а) $\frac{2x^2-3}{12x^3}$; б) $\frac{2b-1}{6ab^2}$; в) $\frac{5a^2-6}{15a^5}$; г) $\frac{b^2x-2b}{6x^6}$. **75.** в) 0; г) $\frac{a}{b}$.

76. а) $\frac{z-y}{yz}$; б) $\frac{a^2-b^2}{3ab}$; в) $-\frac{p^2+q^2}{p^3q^3}$; г) $\frac{3m^2-2n^2}{6m^2n^2}$. **77.** д) $\frac{b}{a}$; е) $-\frac{1}{2p}$;

ж) $\frac{a^2+b^2}{2a}$; з) $-\frac{b^2+c^2}{2b}$. **78.** в) $\frac{2a+3b+3}{3}$; г) $\frac{b^2+5b-1}{b}$. **79.** в) $\frac{a-6}{6}$;

г) $\frac{41a-5}{12}$; д) $\frac{5b-3a}{4}$; е) $\frac{ab-b^2}{a}$. **80.** а) $\frac{3x+3y}{4}$; б) $-\frac{2x+2}{x}$; в) $\frac{36-5x+7y}{12}$;

г) $-\frac{17a+17b+30}{15}$. **81.** д) $-\frac{4a}{a^2-4}$; е) $\frac{2p}{9p^2-1}$. **83.** а) $\frac{px-3p}{6x^2-x-2}$;

б) $\frac{8ax+2ay}{x^2-xy-2y^2}$; в) $\frac{11a}{30x-60}$; г) $\frac{23b}{48a-144}$. **85.** а) $\frac{a+x}{x}$; б) $\frac{2y-b}{y}$; в) $-\frac{2a+b}{ab}$;

г) $\frac{12y^2-10xy-27x^2}{6x^3+13x^2y+6xy^2}$. **86.** а) $\frac{x-5}{5x}$; б) $\frac{6-y}{6y}$; в) $\frac{1}{ab}$; г) $-\frac{1}{ab}$. **87.** д) $\frac{x^2-6x}{x-3}$;

е) $-\frac{2}{a^2-1}$. **88.** а) $\frac{8a}{(a-5)(b+8)}$; б) $\frac{2y^2}{(2y+3)(3x-2)}$. **89.** а) $-\frac{2x}{(3a-1)(x+2)}$;

б) $\frac{7x^2}{(2x-1)(2y+3)}$. **90.** а) $\frac{x-y}{x+y}$; б) $\frac{b-c}{b+c}$; в) $\frac{a+y}{a-y}$; г) $\frac{a+1}{a^2-a}$. **91.** а) $\frac{2-b}{b^2+2b}$;

б) $\frac{b-5a}{ab+5a^2}$; в) $\frac{x-4a}{x^2+4ax}$; г) $\frac{a-10y}{a^2+10ay}$. **92.** а) $\frac{6a+8}{a^3-4a}$; б) $\frac{3x}{x^2-16}$; в) $\frac{5b-10}{4b^2-1}$;

г) $\frac{b}{4a+5}$; д) 2; е) 0. **93.** а) $-\frac{8}{15}$; б) $-\frac{8}{27}$. **94.** а) $\frac{ab}{a^3+b^3}$; б) $\frac{p-q}{p^2+pq+q^2}$;

в) $\frac{1}{a^3+1}$; г) $\frac{3a}{a+4}$. **95.** а) $\frac{1}{y+2}$; б) $\frac{3}{a-6}$; в) $\frac{x^2+y^2}{2(x-y)^2}$; г) $\frac{a^2}{b(b-a)^2}$.

96. а) $-\frac{3}{2a+b}$; б) $\frac{36}{(a-3)^2(a+3)^2}$; в) $\frac{2x-4}{x^2+2x+4}$; г) $\frac{1}{a-1}$. **97.** а) $\frac{2}{a-4b}$;

б) $\frac{1}{b}$; в) $\frac{2x-b}{4x^2+2bx+b^2}$; г) $\frac{4}{y^2-2y+4}$. **100.** $t=\frac{2sv}{v^2-25}$; а) 4 сәғ 10 мин;

б) 5 сәғ 20 мин. **101.** $t=\frac{3sv-2s}{v(v-2)}$; 6 сәғ 40 мин. **102.** а) 0; б) 0.

106. 63 т. **107.** а) $s=vt$; $t=\frac{s}{v}$; б) $v=\frac{m}{\rho}$. **111.** в) $\frac{8a^2}{m}$; г) $\frac{4b}{a}$.

112. д) $-\frac{10a^2x}{9by^2}$; е) $\frac{15xy}{4a}$. **113.** д) $\frac{13mx}{3n}$; е) $\frac{11x^2}{3ab}$. **114.** а) $\frac{a^2x^2}{5b^3}$;

б) $\frac{m^2}{p^4}$. **115.** в) $\frac{n^6}{1000m^3}$; г) $\frac{81a^6}{4b^4}$. **116.** в) $\frac{4a^4b^2}{9m^2n^6}$; г) $-\frac{27x^6}{8y^9}$.

117. ж) $-\frac{1000m^6}{n^6p^3}$; з) $\frac{b^6c^4}{64a^6}$. **119.** в) $\frac{y^2-2y}{3y+6}$; г) $\frac{2a^2b+6ab^2}{a-3b}$. **120.** в) $\frac{1}{axy}$;

г) $\frac{4}{x^2}$. **121.** в) $\frac{y-4}{6x}$; г) $-\frac{3b}{a+b}$. **122.** в) $\frac{x^2+5x+6}{6}$; г) $\frac{y^2-11y+30}{4}$. **123.** а) 1; б) $-1\frac{1}{9}$; $-\frac{2}{21}$. **124.** в) $\frac{2a-2b}{a^2+ab}$; г) $\frac{bx-5b}{ax+5a}$. **126.** а) $\frac{x^2-9x+20}{6}$; б) $\frac{a^2+2ab+a+2b}{12}$; в) $\frac{3y-15}{2y+12}$. **127.** а) $\frac{6a-b}{3a+b}$; б) $\frac{a-4b}{a-b}$. **128.** а) 3 сәг; б) 2 сәг 31 мин. **130.** а) $x=\frac{a-b}{3}$; б) $x=\frac{2b-a}{7}$; в) $x=ab-a$; г) $x=10b-10a$. **132.** д) $-\frac{5x}{14a}$; е) $\frac{2acd^4}{b}$. **133.** д) $\frac{2x}{3my^3}$; е) $\frac{450x^3}{ab}$. **135.** а) $\frac{5m^8}{3n^8}$; б) $\frac{2y}{x^2}$; в) $\frac{ac}{d}$; г) $\frac{3b}{4xy}$. **136.** в) $\frac{ax^2}{44}$; г) $\frac{9}{4m}$; д) $\frac{a}{21b}$; е) $\frac{x^2+2xy}{5}$; ж) $\frac{6ab-3b}{2a^2+ab}$; з) $\frac{10m}{2m-3n}$. **137.** в) $\frac{a^2}{a^2-2a-15}$; г) $\frac{m+n}{2m}$; д) $\frac{1}{x-3y}$; е) $\frac{a-3b}{a+3b}$. **138.** д) $\frac{c}{3c+6}$; е) $-\frac{9p+3}{q}$. **139.** а) $\frac{10}{11}$; -1; б) 0,42. **140.** в) $\frac{b}{a^2-ax}$; г) $\frac{2m-5n}{m+2}$. **141.** в) $\frac{x+1}{a-x}$; г) $\frac{2ap-6a}{p^2+2p+4}$. **142.** а) $-\frac{8}{2b+3}$; б) $\frac{c-b}{ac-3a^2}$. **143.** 2 км/сәг. **145.** а) $c=\frac{ab}{a+b}$; б) $b=\frac{ac}{a-c}$. **147.** а) $\frac{x-y}{y}$; б) $\frac{a^3}{m^4}$; в) $\frac{(a+b)^2}{b^2}$; г) 0. **148.** а) $\frac{2x+1}{2x-1}$; б) $-\frac{5y}{y+1}$; в) $-a$; г) x. **149.** а) $\frac{10}{2m+1}$; б) $\frac{2}{x-3}$. **150.** а) 6; б) 10. **151.** а) $\frac{a+b}{a-b}$; б) $\frac{8}{x-y}$; в) $\frac{p+2q}{pq^2}$; г) $\frac{1}{ab}$. **152.** а) $\frac{16}{9-a^2}$; б) $\frac{6x-1}{4x^2-1}$; в) $-\frac{c}{a}$; г) $\frac{2a+2y}{ax-3a}$. **153.** а) $-2x$; б) $\frac{1}{3q-3p}$; в) $\frac{1+a}{1-a}$; г) $1{,}5x$; д) $\frac{a}{a+2}$; е) $y-5$. **154.** а) 1; б) a; в) x^2+1; г) $-m$. **155.** а) $2x^2+2xy$; б) $\frac{x-2y}{2xy}$; в) $\frac{an-a^2}{a+n}$; г) $\frac{2ab-4a^2}{2a+b}$. **156.** а) $\frac{3}{1-x}$; б) $\frac{a}{4a+8}$; в) $\frac{y-3}{y}$. **157.** а) $\frac{1}{a^2+a+1}$; б) 1. **162.** д) $\frac{4x^2-4y^2}{xy}$; е) a^2+b^2. **163.** а) $\frac{x-1}{x+1}$; б) 1; в) $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}$; г) $\frac{ab+bc+ac}{a+b+c}$. **164.** а) $\frac{2x-a}{2x+a}$; б) $\frac{a-b+3c}{a+b-c}$; в) $\frac{y+x}{y-x}$; г) $\frac{xy}{x+y}$. **165.** а) $\frac{a^2}{b^2}$; б) $\frac{a}{b}$. **166.** а) 3; б) -1. **168.** а) $y=3x+4$; б) $y=-\frac{1}{2}x$. **170.** 12 см һәм 32 см. **171.** 4 сәг тән соң. **182.** а) $y=\frac{1}{x}$; б) $y=\frac{1{,}2}{x}$; в) $y=\frac{5}{x}$. **186.** $\frac{2}{x+7}$. **190.** д) $x(x-1)(x^2+1)$; е) $c(c+1)(c-1)(c-2)$; ж) $4(1-3a)(1+2a)$; з) $(7b+3)(3-5b)$; л) $(2a+1)(a^2+a+1)$; м) $(2-b)(7b^2+8b+4)$. **193.** $v=\frac{60(10-t)}{t-3}$; 45 км/сәг; 80 км/сәг.

194. д) -3 һәм 3 тән башка барлык саннар; е) барлык саннар. **199.** а) $\frac{xy+2}{xy+34}$; б) $\frac{a-c}{a+c}$; в) $\frac{b+a}{2b-2a}$; г) $\frac{(a+3)^2}{3-a}$; е) $-\frac{4y^2+2y+1}{2y^2+y}$; ж) $\frac{2}{x}$; з) $\frac{25a}{5a+3b}$. **200.** д) $\frac{a-2}{a+b}$; е) $\frac{2x-y}{3x+2}$. **201.** а) $\frac{1}{b^7+1}$; б) $\frac{x^{11}-1}{x^{11}}$; в) $\frac{z}{xy-z^2}$; г) $1-ab$. **204.** а) $\frac{4}{9}$; б) $1\frac{1}{3}$; в) 45; г) $\frac{1}{9}$. **207.** а) -4; б) 0,9. **209.** а) $n=1, 2, 3, 6$ булганда; б) $n=3, 4, 6, 12$ булганда; в) $n=1, 2, 3$ булганда. **210.** а) 6; б) 4; в) 0,2; г) 1,4. **211.** а) 2; б) $\frac{1}{3}$; в) 1; г) 0,5. **214.** д) $\frac{3-2y}{x-3y}$; е) 1. **215.** а) $\frac{4b-2c}{2b+c}$; б) $\frac{6}{x}$; в) $\frac{4}{2y+1}$; г) $\frac{a^2-b^2}{ab}$; д) 1; е) $\frac{20}{15a+8}$. **217** а) $\frac{2y+30}{y^2-9}$; б) $\frac{8}{3-2a}$; в) $\frac{b}{y}$; г) $\frac{3x}{4}$; д) $\frac{2m+1}{12m-6}$; е) $\frac{4y^2}{(x^2-y^2)^2}$; ж) $\frac{6a^2+3}{a^3-1}$; з) $\frac{2x-2y}{x^2+xy+y^2}$. **219.** а) $\frac{1}{abc}$; б) 1. **223.** а) $a=-6$ булганда; б) $a=5$ булганда; в) $a=6$ булганда; г) $a=7$ булганда. **225.** а) $n=\pm1$, ±3 булганда; б) $n=\pm1, \pm3, \pm9$ булганда; в) $n=-8, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 4$ булганда. **226.** а) $a=2$, $b=3$; б) $a=8$, $b=3$. **229.** а) $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$; б) 1. **231.** а) $\frac{(x-b)^2}{(x+b)^2}$; б) 1. **236.** а) $\frac{2a}{a-2b}$; б) $3x-3y$; в) $\frac{xy}{x+3y}$; г) $\frac{3}{2a-3c}$. **237.** а) $\frac{ab}{a-b}$; б) $-xy$; в) $\frac{a}{(2a-b)^2}$; г) $\frac{(c+2)^2}{(c-2)^2}$. **238.** а) x^2-y^2; б) a. **242.** а) $\frac{4b-12}{5}$; б) $\frac{4a}{3a-12}$; в) $10x$; г) $\frac{4x}{x+2y}$. **243.** а) $\frac{x-z}{y-z}$; б) $\frac{a^3+x^3}{a^3-x^3}$; в) $\frac{x+1}{2x+1}$; г) $x+1$. **250.** $k=2$ һәм $b=-3$ булганда.

II бүлек

259. а) 0,(142857); г) -2,(2); д) -0,5(3); и) -1,075(0). **260.** б) 0,2(3); в) 0,(428571); г) -0,625(0). **265.** а) $\frac{4a}{a+b}$; б) $\frac{1}{(x+1)^2}$. **279.** а) 3,2; б) 3,11; в) 3,115. **280.** а) 16,6; б) 16,56. **281.** 28,26 см. **282.** 314 м^2. **283.** $\frac{a}{b}$. **293.** ж) 10; з) 6,2. **294.** д) -0,01; е) 0,09; ж) -0,7; з) 3. **301.** а) $x=9,2$ булганда; б) $x=13,5$ булганда; в) $x=1,5$ булганда. **303.** -1. **309.** д) -0,7 һәм 0,7; е) $-\sqrt{40}$ һәм $\sqrt{40}$; ж) -8 һәм 8; з) тамырлары юк. **310.** а) Тамырлары юк; б) -0,3 һәм 0,3; в) $-\sqrt{60}$ һәм $\sqrt{60}$; г) тамырлары юк. **311.** а) -2 һәм 8; б) -7 һәм -1; в) $6-\sqrt{7}$ һәм $6+\sqrt{7}$; г) $-2-\sqrt{6}$ һәм $-2+\sqrt{6}$. **317.** а) 1,29; б) 19; в) 42; г) -17.

318. а) −12; б) −45; в) 0; г) 2. **320.** а) −3; б) 3. **321.** а) $\frac{x^2+2x+4}{25(2-x)}$; б) $16a(a+1)$. **325.** $\sqrt{6}=2,44...$. **326.** $\sqrt{10}=3,1$ ... . **328.** 4,2 см. **329.** а) $\sqrt{(a+b)c}$; б) $\sqrt{b}+a$; в) $\sqrt{(\sqrt{b}+c)a}$. **331.** а) 10,12; б) 6,17; в) 7,04; г) 0,95; д) 4,08; е) 14,88. **332.** а) 1,932; б) 1,189; **333.** а) 7,84; б) 8,12. **334.** а) −5,48 һәм 5,48; б) −1,20 һәм 1,20; в) −0,46 һәм 6,46; г) −3,83 һәм 1,83. **335.** а) −0,3; б) 6,6; в) 6,6; г) 9. **337.** а) 3; б) −2,5. **339.** а) $\frac{5-2a}{5+2a}$; б) $\frac{2y-3x}{2y+3x}$. **352.** а) 8,2; б) 36; в) 12; г) −5. **360.** а) 12; б) 10,8; в) 0,0033; г) $1\frac{13}{27}$; д) $2\frac{4}{5}$; е) $3\frac{1}{2}$. **361.** а) 9; б) 0,24; в) $\frac{8}{15}$; г) $1\frac{3}{8}$. **362.** а) 180; б) 50; в) 48; г) 28; д) 30; е) 6; ж) 24; з) 2,6. **363.** а) 60; б) 60; в) 42; г) 32. **364.** д) 12; е) 12. **365.** д) 6; е) $\frac{15}{16}$. **370.** д) 4,5; е) 3,1; ж) 0,22; з) 0,58. **371.** в) 0,27; г) 3,9. **372.** ж) 15; з) 2. **383.** а) 130; б) 7. **387.** в) $3c$; г) $-5y$; д) $-6x$; е) $3y$; ж) $-10x$; з) $-2a$. **388.** в) $-0,8x$; г) $0,5y$. **390.** а) $-0,7x^2$; б) $0,1a^{13}$; в) $6c^6$; г) $8y^8$. **392.** ж) 45; з) 392. **393.** д) 48; е) 1125; ж) 112; з) 675. **394.** а) 144; б) 225; в) 168; г) 825. **395.** а) 48; б) 135; в) 504. **398.** $\frac{2x+5}{x}$. **412.** б) $-y\sqrt{10}$; в) $x\sqrt{x}$; г) $a^2\sqrt{a}$; д) $4y^3\sqrt{y}$; е) $\frac{x\sqrt{3x}}{4}$. **413.** а) $2a\sqrt{2a}$; б) $10b^2\sqrt{3b}$; в) $-4x\sqrt{3}$; г) $6a^2\sqrt{2}$; д) $5a^3\sqrt{2a}$; е) $-3c^3\sqrt{3}$. **414.** б) $-y\sqrt{3}$; в) $3a\sqrt{a}$; г) $5b^2\sqrt{2}$. **415.** $\frac{2+x}{x}$. **416.** Беренче көндә 36 китап, икенче көндә 48 китап, өченче көндә 60 китап төпләгәннәр. **417.** а) −2,5; б) −7,2. **418.** з) $3\sqrt{2}$; и) $\sqrt{3}$; к) $2\sqrt{2}$. **419.** д) −3 2; е) 3 2. **420.** г) 15; д) 21; е) $12-2\sqrt{6}$. **421.** в) $5-3\sqrt{2}$; г) 60. **422.** в) $18-7\sqrt{6}$; г) $17-5\sqrt{10}$; д) $2-\sqrt{15}$; е) $9\sqrt{6}-33$. **424.** в) 6; г) −0,5; ж) $42-8\sqrt{5}$; з) $66-36\sqrt{2}$. **425.** а) 11; б) 8; в) 32; г) 60; д) 14; е) 8. **426.** д) 6; е) −19; ж) 38; з) 2. **429.** е) $\frac{1}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}$; ж) $-\sqrt{7}$; з) $\sqrt{a}$; и) $\frac{1}{\sqrt{x}}$. **430.** д) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; е) $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$; ж) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; з) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; и) $\frac{1}{\sqrt{a}}$. **439.** 20. **440.** 28 км. **441.** а) −1; б) $8\frac{1}{8}$. **451.** в) 0,(846153); г) 0,(037); д) 0,0(571428); е) −0,3(18); ж) 0,7(6); з) 0,2(18). **455.** г) $\frac{1}{8}$; е) 1; з) $\frac{5}{9}$; и) 1; к) $\frac{21}{38}$. **458.** б) $\frac{1}{3}$; д) 40,5. **459.** 49. **464.** а) $x>0$ булганда; б) $x\geq 0$ булганда; в) $x\geq 0$ булганда, $x=1$ дән башка. **468.** в) 9,1; г) 1,08. **469.** а) 8,5; б) $\frac{7}{96}$; в) $\frac{15}{29}$; г) $\frac{77}{135}$. **470.** а) 45; б) 0,9; в) 100;

г) 0,04. **473.** г) 3,2; д) 8,1; е) 0,001; ж) −64; з) 0,025. **478.** г) $-0{,}5py^3$; е) $\frac{4a^6}{b^3}$; ж) $\frac{2x}{y^3}$; з) $-\frac{c^3}{3a}$. **480.** а) $|a|\sqrt{15}$; б) $21x^2\sqrt{3}$; в) $0{,}5x\sqrt{6x}$; г) $3a^2\sqrt{a}$; д) $3a|a|\sqrt{2b}$; е) $-4m^3\sqrt{3a}$. **481.** а) $-3a\sqrt{b}$; в) $12\ ab\sqrt{ab}$; д) $-c\sqrt{-3c}$; е) $-m^3\sqrt{-5m}$; з) $-\sqrt{-x}$. **484.** в) $-\sqrt{3a^3}$; г) $-\sqrt{-3a^3}$; е) $\sqrt{-3a^3}$; з) $\sqrt{ab^2+a^2b}$. **487.** б) $x+\sqrt{xy}$; г) $m\sqrt{n}-n\sqrt{m}$; е) $3a-\sqrt{ab}-2b$; з) $6x-5x\sqrt{2}$. **488.** в) $m\sqrt{m}-n\sqrt{n}$; г) $x^3+y\sqrt{y}$. **490.** в) 2; г) $3\frac{1}{4}$. **495.** а) $x+\sqrt{xy}+y$; б) $\frac{1}{a-\sqrt{ab}+b}$; в) $\sqrt{2}-\sqrt{x}$; г) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}$. **496.** а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; д) $\sqrt{3}$; е) $\sqrt{10}-\sqrt{3}-1$. **498.** а) $\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x-y}$; б) $\frac{27-a\sqrt{a}}{9-a}$; в) $\frac{1+8x\sqrt{x}}{1-4x}$; г) $\frac{a^3b\sqrt{b}-8}{a^2b-4}$. **499.** а) $\frac{x-y}{x+\sqrt{xy}}$; б) $\frac{a^2-b}{a^2\sqrt{b}-ab}$; в) $\frac{49-a}{343+a\sqrt{a}}$; г) $\frac{mn-1}{mn\sqrt{mn}-1}$. **500.** а) $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{5}-3\sqrt{3}+2\sqrt{15}+4}{22}$. **501.** $x=0$ булганда. **502.** а) $-\sqrt{10}$; б) $5\sqrt{15}$; в) $\sqrt{3}$; г) $3{,}5\sqrt{6}$. **503.** а) $-\frac{1}{x}$; б) $\sqrt{ab}\,(a-b)$.

III бүлек

511. а) 0; −1,5; б) $-\frac{1}{3}\sqrt{6}$; $\frac{1}{3}\sqrt{6}$; в) 0; $\frac{4}{5}$; г) 0; $\frac{1}{2}$; д) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; е) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **512.** а) 0; 2; б) −1; 1; в) 0; $\frac{1}{4}$; г) 0. **513.** а) 0; 1; б) $-\frac{1}{2}\sqrt{6}$; $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; в) 0; $\frac{2}{3}$; г) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; д) $\frac{2}{9}$; е) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$. **514.** а) 0; −9; б) $-\frac{3}{2}\sqrt{2}$; $\frac{3}{2}\sqrt{2}$; в) $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; г) −2; 2; д) $\frac{1}{8}$; е) тамырлары юк. **515.** 2 һәм 3. **516.** 12 см. **517.** $4\sqrt{3}$ см. **518.** $\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ дм. **519.** $r\sqrt{\pi}$ см. **521.** 3,96; 59. **523.** б) $\frac{1}{2}$. **524.** в) −1; 6; г) −1; 9. **526.** а) 2; 4; б) −3; 2; в) −3; −1; г) $-2-\sqrt{6}$; $-2+\sqrt{6}$. **527.** а) 2; 2,5; б) −1,6; 1. **528.** −3; 0,2. **530.** $\frac{c}{2-c}$. **531.** а) 9; б) $\frac{1}{4}$. **534.** а) 1; $1\frac{1}{3}$; б) 0,6; 1; в) 2; $2\frac{1}{3}$; г) $2\frac{1}{2}$; 2; д) 1; 0,2; е) −3; $2\frac{3}{4}$; ж) −2; 12; з) −10; 9. **535.** а) $-\frac{1}{7}$; $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$; в) тамырлары юк; г) $\frac{1}{9}$; д) −8; 19; е) тамырлары юк. **536.** а) 0,2; 2; б) −6; 2,5; в) $1\frac{2}{3}$; г) $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{7}$; д) $\frac{1\pm\sqrt{41}}{4}$; е) $\frac{1}{4}$. **537.** $x=5$ һәм $x=6$ булганда; б) $x=\frac{7-\sqrt{41}}{2}$ һәм $x=\frac{7+\sqrt{41}}{2}$ булганда; в) $x=0$ һәм $x=3$ булганда;

г) $x = -1$ һәм $x = 1$ булганда. **538.** а) $x = 2$ һәм $x = 9$ булганда; б) $x = 0{,}5$ һәм $x = 2$ булганда. **539.** а) 2; $2\frac{2}{3}$; б) 0,2; 3; в) − 10; 8; г) − 1; 23; д) 3,5; 5,5; е) −1; $2\frac{7}{15}$; ж) $\frac{10\pm\sqrt{2}}{7}$; з) $5\pm5\sqrt{2}$. **540.** а) $\frac{1}{2};1\frac{1}{4}$; б) $-1\frac{1}{2};\frac{1}{6}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) −6; 14; д) $-3\pm2\sqrt{7}$; е) −6; 0,8; ж) 17; з) $-6\frac{2}{3}$; −4. **541.** а) $-\frac{1}{2}$; 3; б) 1; $1\frac{2}{3}$; в) −1; −0,8; г) $\frac{1}{6}$; д) тамырлары юк; е) −11; 2; ж) 4; 8; з) 0,7; 0,9. **542.** а) −0,2; 2; б) −7; 2; в) $3\pm3\sqrt{2}$; г) − 4; 5; д) 16; 36; е) −1; $2\frac{7}{15}$; ж) $\frac{1}{5}$; з) $-1\frac{1}{4}$; 1. **543.** а) 1; 25; б) −10; $\frac{1}{3}$; в) −8; 12; г) $\frac{1}{3}$; 3; д) $20\pm10\sqrt{5}$; е) тамырлары юк. **544.** а) −0,2; 1,7; б) $\frac{7\pm\sqrt{13}}{6}$; в) $5\pm\sqrt{5}$; г) −4; 0,5. **545.** а) −8; 3; б) $1\frac{3}{4}$; 4; в) −91; 87; г) −59; 53. **546.** а) −2; $-2\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{15}$; в) 0; 2; г) −2; 3. **547.** а) −1; 23; б) 2; $2\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{26}$; 1; г) − 5; − 3. **548.** а) $x_1 - 0{,}36$, $x_2 \approx 0{,}56$; б) $x_1 - 2{,}78$, $x_2 - 0{,}72$; в) $y_1 - 1{,}26$; $y_2 \approx 1{,}59$; г) $y_1 - 9{,}20$, $y_2 \approx 1{,}20$. **549.** а) $x_1 \approx 1{,}35$, $x_2 \approx 6{,}65$; б) $y_1 \approx 0{,}78$, $y_2 \approx 3{,}22$. **550.** а) −1; $2\frac{6}{7}$; б) − 7; 5; в) − 0,2; 1,8; г) тамырлары юк; д) 25; е) − 9; 3. **551.** а) 7; б) 0,6; 2; в) $-\frac{3}{4}$; $2\frac{1}{2}$. **553.** а) $-\frac{4}{3}$; б) 7,5. **554.** а) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; б) $2+3\sqrt{5}$. **558.** 32 см. **559.** 140 м. **560.** 10 м, 21 м. **561.** 8 см, 15 см. **562.** 11 һәм 12. **564.** 30 см. **565.** 16 см, 30 см. **566.** 15 см. **567.** 26. **568.** 16, 17 һәм 18; −18; −17 һәм −16. **569.** б) $\frac{x-4}{3-x}$. **570.** а) 1; б) 2. **571.** а) 0; 6; б) $-1\frac{3}{4}$; 0, **578.** −5; $p = -2$. **579.** 0,5; $q = 6{,}25$. **580.** 0,6; $b = -43$. **581.** − 2; $c = -106$. **582.** 35. **583.** − 8,75. **587.** а) 0; $-\frac{1}{3}$; б) $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; в) −6; 0,8; г) −2; $-\frac{2}{9}$; д) теләсә нинди x өчен; е) $-1\frac{2}{5};\frac{1}{7}$. **588.** 9,6 $м^2$. **589.** 90 см. **590.** д) −27; −1; е) −0,2; ж) −0,5; 1; з) $\frac{2}{9}$; и) 0; $\frac{1}{6}$. **591.** а) −12,5; б) 3; 4; в) $-2\frac{2}{3}$; г) −1; 3,5; д) −2; $1\frac{1}{3}$; е) 0; −8; ж) 1; 1,5; з) 0; 1,5. **592.** в) $\frac{2}{11}$; г) 1; 10; д) −1; 1; е) 1; 2; ж) $-3\frac{1}{4}$; 1; з) −3,5; 5. **593.** а) $3\pm\sqrt{5}$. б) −6; 5; в) $-4\frac{1}{3}$; г) 1; − 9; д) тамырлары юк; е) 4. **595.** а) 6; б) −3; $\frac{2}{3}$; в) тамырлары юк; г) 5; д) −6; 6; е) −4; 4. **596.** а) 2; б) 1; в) −11; г) 6. **597.** а) −3; б) 0; $-1\frac{2}{3}$; в) 3; г) −3; 3; д) 9; 13; е) $1\frac{1}{3};2\frac{1}{3}$. **598.** а) 1; 7; б) $1\pm\sqrt{14}$; в) $\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$; г) 1; $-\frac{1}{9}$. **599.** а) $-\frac{2}{11}$; б) $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; в) $\frac{7\pm3\sqrt{6}}{10}$. **602.** а) $\sqrt{y}$; б) $\sqrt{y}$. **604.** $\frac{2}{5}$.

605. $\frac{3}{8}$. **606.** 60 км/сәг һәм 40 км/сәг. **607.** 18 км/сәг. **608.** 10 км/сәг һәм 12 км/сәг. **609.** 70 км/сәг һәм 80 км/сәг. **610.** 80 км/сәг. **611.** 6 км/сәг яки 5 км/сәг. **612.** 2,5 км/сәг. **613.** 2 км/сәг. **614.** 10 сәг һәм 15 сәг. **615.** 20 көн һәм 30 көн. **616.** 10 көн һәм 15 көн. **617.** 36 км/сәг һәм 40 км/сәг. **619.** а) 0,1; б) 3,5. **620.** 16. **630.** 4км/сәг. **631.** 30 га. **632.** а) $\frac{x+y}{x-y}$; б) $\frac{2x+2y}{x-y}$. **636.** а) 0; 1; б) 0; 6,8; в) −1,2; 1,2; г) 0. **641.** а) −1; $-\frac{3}{4}$; б) − 8; 7; в) −7; 8; г) 1,6; 2; д) $-3\frac{1}{8}$; 3; е) −1; $4\frac{2}{3}$; ж) $-5\frac{2}{3}$; 2; з) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. **642.** а) −1,2; 0,2; б) $-4\frac{2}{3}$; $-1\frac{2}{3}$; в) $2\frac{2}{3}$; 4; г) $-2\frac{3}{11}$; −1; д) $-\frac{3}{5}$; $-\frac{2}{5}$; е) −1; 1; ж) −2,5; 2,5; з) теләсә нинди x өчен. **645.** $a=8$ булганда. **649.** 10, 11, 12, 13, 14 яки −2, − 1, 0, 1, 2. **650.** − 2, 0, 2 яки 6, 8, 10. **652.** 7 һәм 8. **655.** 9. **657.** 0,36 $м^2$ яки 0,81 $м^2$. **658.** 54 × 36 см. **659.** а) $2\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; б) $-6\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$; в) $3\pm\sqrt{2}$; г) $5\pm3\sqrt{2}$. **666.** 9,16. **667.** $c=3{,}12$. **668.** $b=-2$, $c=0$. **669.** $b=1$, $c=-2$. **673.** а) 11; 13; б) −14; 5; в) −3; 7; г) −5; $4\frac{1}{3}$; д) 12; е) тамырлары юк; ж) 3; −5; з) тамырлары юк. **677.** а) $\frac{-5\pm\sqrt{77}}{4}$; б) −1,5; 1; в) тамырлары юк; г) 9; д) 0; е) $-\frac{1}{3}$; ж) $2\pm\sqrt{35}$; з) 0; −1,5. **678.** а) 1; $\frac{2}{3}$; б) 0,4; 0,5. **680.** 500 км/сәг һәм 600 км/сәг. **681.** 60 км/сәг. **682.** 10 сәг. **683.** 9 сәг. **684.** 50 км/сәг. **685.** 60 км/сәг. **686.** 5 км/сәг. **687.** 2 км/сәг. **688.** 3 км/сәг. **689.** 3 км/сәг. **690.** 2,4 км/сәг. **691.** 3 км/сәг. **692.** 50 км/сәг. **693.** 40 км/сәг. **694.** 4 сәг 40 мин. **695.** 160 км яки 200 км. **696.** 450 км. **697.** 18 км/сәг. **698.** 48 км/сәг яки 9 км/сәг. **699.** 60 см һәм 80 см. **700.** 10 костюм. **701.** 32 тузан суыргыч. **702.** 10 көн һәм 15 көн. **703.** 15 көн һәм 10 көн. **704.** 12 сәг. **705.** 10 сәг һәм 15 сәг. **706.** 25 сәг һәм 20 сәг.

IV бүлек

726. $3\frac{1}{15}$. **727.** а) $\frac{5-x}{7}$; б) 1. **728.** а) 1; 5; б) 0,3; 2. **745.** $\frac{1}{16}$; 22; 0. **746.** а) −1; 1; б) 2; в) −6; 3; г) −1; 5. **758.** 6 × 6 дм. **759.** $\frac{1}{6}$. **769.** а) −3; −2; −1; 0; 1; 2. **771.** а) − 9; б) 16; в) 31; г) 7. **773.** а) (5; 8); б) [−4; 4]; в) (7; +∞); г) (−∞; 6). **776.** а) $\frac{1}{x^2}$; б) $-\frac{1}{2a^4}$. **778.** 40 км/сәг; 45 км/сәг. **779.** $\frac{3}{4}$. **784.** а) (5; +∞); б) (4; +∞); в) (−∞; 1]; г) (−∞; 3]; д) (−∞; 0,15); е) $\left[\frac{4}{9}; +\infty\right)$; ж) (−∞; −0,25); з) (−∞; 0]; и) (−8; +∞); к) (0; +∞); л) (18; +∞); м) (7; +∞). **785.** а) (−∞; 8,5); б) [−0,6; +∞); в) (4; +∞); г) (7,5; +∞); д) $\left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$; е) (1,8; +∞); ж) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$; з) (−∞; 2,4]; и) (−∞; 12); к) (0; +∞); л) [−30; +∞); м) [−20; +∞). **788.** а) (−∞; 0,4); б) (−∞; −0,4); в) [−5; +∞);

г) $\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$; д) $(-1,4; +\infty)$; е) $(-\infty; -1)$; ж) $(-\infty; 12,6)$; з) $[-13; +\infty)$. **789.** а) $(-\infty; 1)$; б) $(-\infty; 2)$; в) $[6; +\infty)$; г) $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$; д) $(-\infty; 0)$; е) $(-\infty; 9)$; ж) $(-13; +\infty)$; з) $\left(2\frac{1}{3};+\infty\right)$. **790.** а) $x > \frac{1}{2}$ булганда; б) $y > 7$ булганда; в) $c < -25$ булганда. **791.** а) $a < 2,5$ булганда; б) $p > 5$ булганда. **792.** а) $\left(-\infty;-\frac{7}{8}\right]$; б) $(9; +\infty)$; в) $(-\infty; -3,1)$; г) $(-\infty; 0,8)$; д) $\left(-\infty;1\frac{3}{4}\right)$; е) $(-\infty; 22,5)$; ж) $(-\infty; 2)$. **793.** б) $[0; +\infty)$; в) $(1; +\infty)$; г) $\left[2\frac{2}{3};+\infty\right)$; д) $(-\infty; 4,7]$; е) $(4,8; +\infty)$. **794.** а) $(6; +\infty)$; б) $(0; +\infty)$; в) $(-\infty; -5)$; г) $(-3; +\infty)$. **795.** а) $(-\infty; 2)$; б) $(2; +\infty)$; в) $(-0,4; +\infty)$; г) $\left(-\infty;\frac{2}{15}\right)$. **796.** а) $\left(-\infty;14\frac{1}{3}\right)$; б) $\left[-\frac{1}{8};+\infty\right)$; в) $(-\infty; 14]$; г) $(-17; +\infty)$. **797.** а) $(2,5; +\infty)$; б) $(-\infty; 6)$; в) $[0; +\infty)$; г) $(3; +\infty)$; д) $(-4; +\infty)$; е) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$; ж) $\left(-\infty;1\frac{5}{7}\right)$. **798.** а) $[0; +\infty)$; б) $\left(1\frac{1}{3};+\infty\right)$; в) $\left(\frac{1}{6};+\infty\right)$; г) $\left(-\infty;2\frac{3}{4}\right]$; д) $[14; +\infty)$; е) $(-\infty; 20,5)$. **799.** а) $y < 3$ булганда; б) $y > 7$ булганда; в) $y > \frac{3}{17}$ булганда; г) $y < 0,1$ булганда. **800.** а) $(-\infty; 6)$; б) $\left[1\frac{5}{7};+\infty\right)$; в) $(-\infty;12)$; г) $(2; +\infty)$; д) $\left[-1\frac{2}{3};+\infty\right)$; е) $(0; +\infty)$. **801.** а) $(-\infty; 0,2)$; б) $(-\infty; 0,5]$; в) $(-\infty; 40]$; г) $(-\infty; -10]$. **802.** б) $\left(-\infty;\frac{2}{13}\right]$; в) $[1,5; +\infty)$; г) $(-\infty; 3,5]$; д) $(-\infty; -10)$; е) $(9; +\infty)$. **803.** а) $\left(-\infty;\frac{1}{6}\right)$; б) $[-5; +\infty)$; в) $(-\infty; -0,6]$; г) $\left(-\infty;-3\frac{5}{6}\right)$. **804.** а) $a > 0,7$ булганда; б) $b < 3$ булганда. **805.** а) x — теләсә нинди сан; б) чишелешләре юк; в) чишелешләре юк; г) чишелешләре юк. **808.** а) $x \geq 2$ булганда; б) $a \leq \frac{2}{3}$ булганда; в) $a \geq -\frac{1}{3}$ булганда; г) $a \leq 1,4$ булганда; д) $x \geq 0,2$ булганда; е) $x \geq 6$ булганда. **809.** а) 3; б) 24. **810.** а) 1; 2; 3; 4; б) 1; 2. **811.** 2 см дан кимрәк. **812.** 12,15 дм дан кимрәк. **813.** $26\frac{2}{3}$ км дан артык түгел. **814.** 3. **815.** а) 1; 4; б) 0; 1. **817.** 12 км/сәг. **821.** а) $(6; +\infty)$; б) $(-\infty; -1)$; в) $\left(0;3\frac{1}{3}\right)$; г) чишелешләре юк. **822.** а) $(0,8; +\infty)$; б) $[2; 4]$; в) $\left(\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right)$; г) $(0,1; 0,2)$. **823.** а) $[2; 2,5]$; б) $(1,5; 3)$; в) $\left(13\frac{1}{3};25\right)$; г) $\left(-\infty;\frac{4}{9}\right]$. **824.** а) $(-12; 2]$; б) чишелешләре юк; в) $(0; 15)$; г) $(-\infty; -3)$. **825.** а) $(-1; 0,8)$;

б) $(-\infty; -1,5]$; в) $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; г) $[3; 6,7)$. **826.** а) $(-\infty; 2,4)$; б) чишелешләре юк; в) $\left[-8; 1\frac{1}{3}\right)$; г) $[1,5; +\infty)$. **827.** а) $(-\infty; 1]$; б) $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) $[3; 6]$; г) $[-1; 1,5]$. **828.** а) $(3; +\infty)$; б) $(-\infty; -3)$; в) $[-11; 3]$; г) чишелешләре юк. **829.** а) $\left(2; 3\frac{4}{7}\right)$; б) $(0,1; +\infty)$; в) $(-0,24; +\infty)$; г) $(-\infty; -1,8)$. **830.** а) −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3; б) 2, 3, 4, 5, 6; в) −1, 0, 1, 2, 3. **831.** а) 0, 1, 2, 3; б) 4, 5, 6, 7; в) 1; г) 1. **832.** а) $(-\infty; 2,8)$; б) чишелешләре юк. **833.** а) $(-\infty; 6)$; б) $(1;15)$; в) $[0,6; 5]$; г) $(2; 16]$. **834.** а) $\left(\frac{1}{13}; 9\right)$; б) $(-2; -1)$; в) чишелешләре юк; г) $\left[\frac{2}{11}; 2\right]$. **835.** а) $(-1; 2)$; б) $(-12; 17)$; в) $(0,5; 2)$; г) $(-1; 3)$. **836.** а) $\left[-2\frac{5}{7}; 5\right]$; б) $[-11; 7]$; в) $\left[-5; \frac{1}{3}\right]$; г) $\left[-\frac{2}{3}; 2\right]$. **837.** а) $[-1; 2)$; б) $[3; 9]$; в) $(-0,7; 1,1)$; г) $\left(-1\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$. **838.** а) $1\frac{1}{5} < y < 2$ булганда; б) $0,5 \le b \le 6,5$ булганда. **840.** а) $(-\infty; 2)$; б) $(1; 4)$. **841.** а) $(1; 7)$; б) $(1; 3)$. **842.** а) $x \le \frac{12}{25}$; б) $x > 2,2$; в) $x \ne \frac{2}{3}$. **843.** 1, 2, 3, 4, 6, 12. **845.** 10 км/сәг, 15 км/сәг. **865.** а) $-6 < a + 2b < -3$; б) $-11,5 < \frac{1}{2}a - b < -9$. **866.** $5,2 < \frac{AB}{2} < 5,25$. **868.** $4,8 \le \frac{a+c}{2} \le 4,9$. **879.** а) $(-\infty; -60)$; б) $(4,8; +\infty)$; в) $(0,56; +\infty)$; г) $\left(-\infty; \frac{1}{16}\right]$; д) $(-\infty; -1)$; е) $\left(1\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **880.** а) $(-\infty; -115)$; б) $(0,2; +\infty)$; в) $(-\infty; 15)$; г) $(-\infty; 1,4)$. **881.** а) $(-\infty; 0,325)$; б) $(-1; +\infty)$. **882.** а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 2, 3, 4, 5. **883.** а) Андый кыйммәтләре юк; б) x ның теләсә нинди кыйммәтләре өчен. **884.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$. **885.** а) $a > 0$ булганда; б) $a > 2$ булганда; в) $a > -3$ булганда; г) $a > -7$ булганда. **886.** а) $b < 0$ булганда; б) $b < -4$ булганда; в) $b < -3$ булганда; г) $b < -0,2$ булганда. **887.** а) $m \ge 8$ булганда; б) $m < 2$ булганда; в) $m \le -6$ булганда; г) $m < 3,5$ булганда. **889.** Тимер коелмалар 5 тән артык түгел. **890.** 6 км/сәг тән артыграк. **891.** 18 км/сәг тән артыграк. **893.** а) $(9; +\infty)$; б) $(-\infty; 0)$; в) чишелешләре юк. **895.** а) $\left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$; б) $(0,1; 5)$; в) чишелешләре юк; г) $(0,8; +\infty)$; д) $(-\infty; -0,2)$; е) $\left(1\frac{5}{11}; +\infty\right)$. **896.** а) 1, 2, 3. 4, 5, 6, 7, 8, 9; б) −10; в) 1; г) 2, 3, 4, 5. **897.** а) $(-3; 6)$; б) $(1,5; 2,5)$. **898.** а) $1,5 < x < 4,5$ булганда; б) $5 \le x \le 15$ булганда. **899.** а) $\left(0; \frac{1}{6}\right)$; б) $(0; 0,8)$. **900.** а) $(-1; 0)$; б) $(-5; 0)$. **901.** 1 сум 16 тиеннән кыйммәтрәк, 2 сум 04 тиеннән арзанрак. **902.** 10 км дан артыграк һәм $16\frac{1}{4}$ км дан кимрәк.

909. г) $\frac{27}{64}$; д) $-39\frac{1}{16}$; е) $-\frac{4}{25}$. **916.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{16}$; в) $\frac{1}{18}$; г) $\frac{3}{13}$; д) 6; е) 125. **919.** в) $\frac{1-a^2b^2}{ab}$; г) $\frac{(xy-2)(x+2y)}{xy}$. **920.** а) $\frac{1}{ab}$; б) $\frac{a+b}{a^2b^2(b-a)}$. **922.** 12,5 км/сәг. **923.** а) $x > \frac{1}{5}$. **926.** б) 3; г) 25; е) 0,001. **932.** а) 2^6; б) 2^{-3}; в) 2^3; г) 2^2. **934.** а) 1; б) 27; в) 1000; г) $\frac{1}{25}$; д) 2; е) 1; ж) 81; з) 15 625. **935.** а) 5; б) 1; в) $\frac{1}{36}$; г) 144; д) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{1}{81}$. **938.** а) x^{-2}; б) x^5; в) x^{n+7}; г) x^{4-n}. **940.** а) −1; б) 6. **941.** а) 0,224; б) 125. **945.** а) $\frac{1}{3}x^4y^5$; б) $81ab^7$; в) $15x^5y^5$; г) $\frac{5}{4}p^5q^{10}$. **946.** а) $\frac{1}{3}xy^{11}$; б) $\frac{7}{5}a^4b^4$; в) $5c^3p^3$; г) $2x^{-8}y^9$. **947.** а) $4x$; б) $3b$; в) $4a^4b^2c^4$; г) $\frac{8}{3}x^{-2}y^5z$. **948.** а) $27x^3y$; б) $20a^6b^{-2}$; в) $4a^{-10}b^{12}$; г) $\frac{1}{2}x^{-5}y^6$. **950.** 3 км/сәг. **952.** а) Чишелешләре юк; б) $x < -\frac{1}{27}$. **961.** а) $4{,}55 \cdot 10^5$; б) $2{,}288 \cdot 10^2$. **962.** а) $8{,}25 \cdot 10^3$; б) $2{,}5625 \cdot 10^{-2}$. **963.** а) $2{,}1 \cdot 10^2$; б) $1{,}5 \cdot 10^3$. **967.** $1{,}404 \cdot 10^3$ кг. **968.** 96 км/сәг. **969.** а) 42,966; б) 17,856. **970.** а) $2b^5$; б) $-\frac{1}{2}x^{-2}y$. **971.** а) $\left(-\infty; -\frac{7}{12}\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$. **984.** а) $6{,}594 \cdot 10^8$; б) 8. **985.** Чишелешләре юк. **986.** $\sqrt{2} - 9$. **993.** 0,92 кг. **994.** 21,21 м. **995.** 13,78 Ом. **996.** 527 $м^2$. **997.** $1{,}10 \cdot 10^{21}$ т га. **998.** а) $7{,}5 \cdot 10^7$; б) $8{,}0 \cdot 10^3$; в) $8{,}26 \cdot 10^2$; г) $1{,}4 \cdot 10^{-4}$. **999.** а) $1{,}6 \cdot 10^2$; б) $6{,}2 \cdot 10^2$. **1004.** 21,9 $м^2$. **1005.** 4,93 га. **1006.** 1,6 км. **1007.** а) 25,2 м; б) 3,4 м. **1008.** 9,2 м. **1009.** 37 $см^3$. **1010.** 48,2 см, $1{,}3 \cdot 10^2$ $см^2$. **1011.** а) $1{,}04 \cdot 10^3$. **1012.** 6,3. **1013.** а) $2{,}2 \cdot 10^2$ $см^2$; б) $1{,}98 \cdot 10^8$ $м^2$. **1014.** 70 т. **1018.** 20 км/сәг. **1023.** а) $1{,}0 \cdot 10^3$; б) $1{,}2 \cdot 10^{-6}$. **1024.** 11 км/с. **1029.** 0,05 $м^3$ га. **1036.** а) 10 000; б) $\frac{8}{25}$. **1039.** а) −1600; б) −0,08; в) −1000; г) 11; д) 7; е) 5. **1041.** а) $\frac{x^3-y^3}{x^2y^2}$; б) $\frac{y(x+y)}{x^2}$; в) $\frac{n^2}{(m-n)^2}$; г) $\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}$. **1042.** а) $\frac{1}{xy(x+y)}$; б) $-(a+b)$. **1043.** а) $0{,}45b^2$; б) $0{,}25x^3y^{-3}$; в) $4{,}8y^{-1}$; г) −12,5; д) $\frac{1}{3}a^{-3}b^4$; е) $61x^{-4}y^2$. **1048.** а) x^{17}; б) a^{12}. **1050.** а) 3^n; б) 2^{-n}. **1053.** а) $2{,}38 \cdot 10^4$; б) $1{,}62 \cdot 10^{-1}$; в) $3 \cdot 10^8$; г) $8{,}67 \cdot 10^{17}$. **1054.** а) $1{,}43 \cdot 10^5$; б) $4{,}071 \cdot 10^3$; в) $9 \cdot 10^{-4}$; г) $2{,}13 \cdot 10^5$. **1064.** 25,6. **1067.** 48,2 м һәм $1{,}3 \cdot 10^2$ $м^2$.

Авыррак мәсьәләләр

1078. а) $\frac{x^2+ax+a^2}{x+a}$; б) $\frac{2a+1}{4a^3+2a^2+a}$. **1079.** $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$, $u = -1$, $v = -2$. **1082.** 2. **1083.** $x = 1$, $y = 2$. **1085.** а) 2; б) 1. **1087.** $(x^2 + x + 1) \times \times (x^2 + x + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)$. **1095.** –6. **1096.** ±16. **1097.** 2. **1099.** 160 км. **1100.** 10 м. **1101.** 60 сәг. **1102.** 10 км. **1103.** 72 км. **1104.** 4,5 сәг һәм 3,6 сәг. **1105.** 1,2 тапкыр. **1106.** 12 сәг тә һәм 15 сәг тә. **1107.** 28 сәг тә һәм 21 сәг тә. **1110.** 2 сәг тән соң. **1122.** 10.

Эчтәлек

I бүлек
РАЦИОНАЛЬ ВАКЛАНМАЛАР

§ 1. Рациональ вакланмалар һәм аларның үзлекләре 3
1. Рациональ аңлатмалар 3
2. Вакланманың төп үзлеге. Вакланмаларны кыскарту 7

§ 2. Вакланмаларның суммасы һәм аермасы 14
3. Ваклаучылары бертөрле булган вакланмаларны кушу һәм алу 14
4. Ваклаучылары төрле булган вакланмаларны кушу һәм алу 19

§ 3. Вакланмаларның тапкырчыгышы һәм өлеше 26
5. Вакланмаларны тапкырлау. Вакланманы дәрәҗәгә күтәрү 26
6. Вакланмаларны бүлү 31
7. Рациональ аңлатмаларның рәвешен үзгәртү 35
8. $y = \frac{k}{x}$ функциясе һәм аның графигы 41
I бүлеккә өстәмә күнегүләр 46

II бүлек
КВАДРАТ ТАМЫРЛАР

§ 4. Реаль саннар 55
9. Рациональ саннар 55
10. Иррациональ саннар 60

§ 5. Арифметик квадрат тамыр 66
11. Квадрат тамырлар. Арифметик квадрат тамыр 66
12. $x^2 = a$ тигезләмәсе 69

13. Квадрат тамырның якынча кыйммәтләрен табу 72
14. $y = \sqrt{x}$ функциясе һәм аның графигы . . . 76

§ 6. Арифметик квадрат тамырның үзлекләре 80
15. Тапкырчыгыш һәм вакланмадан квадрат тамыр 80
16. Дәрәҗәдән квадрат тамыр 85

§ 7. Арифметик квадрат тамырның үзлекләрен куллану 89
17. Тапкырлаучыны тамыр тамгасы тышына чыгару. Тапкырлаучыны тамыр тамгасы астына кертү 89
18. Квадрат тамырларны эченә алган аңлатмаларның рәвешен үзгәртү 92
II бүлеккә өстәмә күнегүләр 98

III бүлек
КВАДРАТ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР

§ 8. Квадрат тигезләмә һәм аның тамырлары 105
19. Квадрат тигезләмәнең билгеләмәсе. Тулы булмаган квадрат тигезләмәләр 105
20. Квадрат тигезләмәләрне икебуынның . . . квадратын аерып чыгару юлы белән чишү 109

§ 9. Квадрат тигезләмә тамырларының формуласы 112
21. Квадрат тигезләмәләрне формула кулланып чишү 112
22. Квадрат тигезләмәләр ярдәмендә мәсьәләләр чишү 118
23. Виет теоремасы 121

§ 10. Вакланмалы рациональ тигезләмәләр 126
24. Вакланмалы рациональ тигезләмәләрне чишү 126
25. Рациональ тигезләмәләр ярдәмендә мәсьәләләр чишү 130
26. Тигезләмәләрне график ысул белән чишү 132
III бүлеккә өстәмә күнегүләр 135

IV бүлек

ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР

§ 11. Санлы тигезсезлекләр һәм аларның үзлекләре 144
27. Санлы тигезсезлекләр 144
28. Санлы тигезсезлекләрнең үзлекләре 147
29. Санлы тигезсезлекләрне кушу һәм тапкырлау 151

§ 12. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекләр һәм аларның системалары 154
30. Санлы аралыклар 154
31. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекләрне чишү 158
32. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекләр . . . . системаларын чишү 166
IV бүлеккә өстәмә күнегүләр 173

V бүлек

БӨТЕН КҮРСӘТКЕЧЛЕ ДӘРӘҖӘ

§ 13. Бөтен күрсәткечле дәрәҗә һәм аның үзлекләре 179
33. Бөтен тискәре күрсәткечле дәрәҗәнең билгеләмәсе 179
34. Бөтен күрсәткечле дәрәҗәнең үзлекләре 182
35. Санның стандарт рәвеше 187

§ 14. Якынча исәпләүләр 190
36. Якынча кыйммәтләрнең язылышы 190
37. Якынча кыйммәтләр белән гамәлләр 193
38. Якынча бирелгәннәрне калькуляторда исәпләү 198
V бүлеккә өстәмә күнегүләр 201

Авыррак мәсьәләләр 206
Тарихи мәгълүматлар 211
VII класс алгебра курсы буенча белешмәләр . . 217
Татарча-русча атамалар күрсәткече 223
Җаваплар 224

Учебное издание

Макарычев Юрий Николаевич
Миндюк Нора Григорьевна
Нешков Константин Иванович
Суворова Светлана Борисовна

АЛГЕБРА

Учебник для 8 класса
татарской средней общеобразовательной
школы

На татарском языке

Уку-укыту басмасы

Макарычев Юрий Николаевич
Миндюк Нора Григорьевна
Нешков Константин Иванович
Суворова Светлана Борисовна

АЛГЕБРА

Татар урта гомуми белем бирү мәктәбенең
8 нче сыйныфы өчен дәреслек

Редакторы *Л. Х. Мөхәммәтҗанова*
Бизәлеш редакторы *Р. А. Сәйфуллина*
Техник редакторы *Ә. С. Трофимова*
Компьютерда биткә салучысы *Г. Р. Галимҗанова*
Корректоры *С. З. Гыймалетдинова*
Рәсемнәрне компьютерда эшкәртүчесе *Э. Ф. Нурмөхәммәтова*

Оригинал-макеттан басарга кул куелды 12.12.2005.
Форматы $60 \times 90^1/_{16}$. Офсет кәгазе. «Школьная» гарнитурасы
Офсет басма. Басма табагы 15,0 + форз. 0,25.
Тиражы 9400 д. Заказ К 5/123.

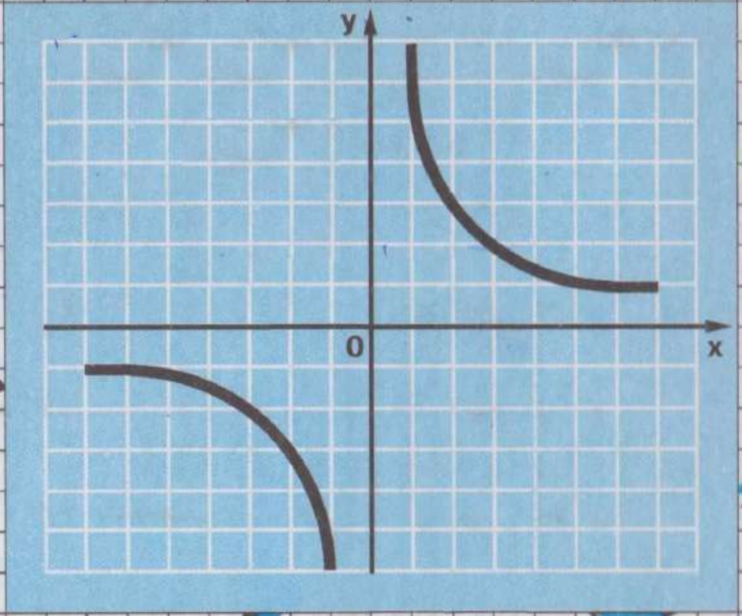
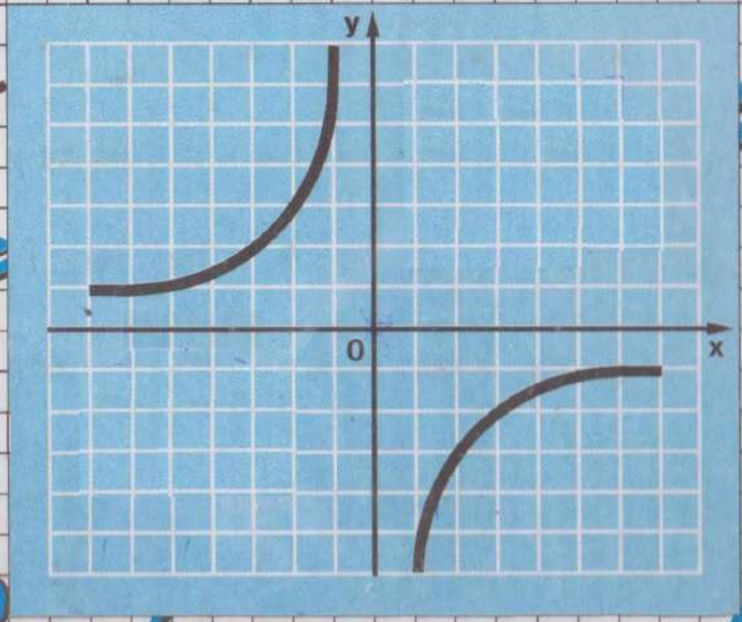
«Мәгариф» нәшрияты. 420111. Казан, Бауман урамы, 19.
Тел/факс (843) 292-57-48.
http://magarif.kazan.ru
E-mail: magarif@mail.ru

ДУП «Полиграфия-нәшрият комбинаты».
420111. Казан, Бауман урамы, 19.

10 НАН 99 ГА КАДӘРГЕ НАТУРАЛЬ САННАРНЫҢ КВАДРАТЛАРЫ ТАБЛИЦАСЫ

ДИСТӘЛӘР	БЕРӘМЛЕКЛӘР									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	[illegible]	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

$y = \frac{k}{x}$, $k > 0$ ФУНКЦИЯСЕНЕҢ ГРАФИГЫ



$y = \frac{k}{x}$, $k < 0$ ФУНКЦИЯСЕНЕҢ ГРАФИГЫ